ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Winter 2012

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieur- und Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **keine** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. Bestimmen Sie

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1-x)}{\sin^2 x}$$

b)

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

(5 P)

2. Geben Sie Real- und Imaginärteil der

a) zwei komplexen Zahlen z an, für welche gilt:

$$\left|\frac{ze^{i\frac{\pi}{7}}}{(1-i)^3}\right| = \sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad \arg\left(\frac{z^2}{i}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

b) drei komplexen Zahlen z an, für welche gilt:

$$z^3(-1+7i) = \frac{5+15i}{1+2i}.$$

(6 P)

3. **a)** Beweisen Sie

$$\frac{d}{dt}\tan t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t)\cos t = \frac{x(t)}{\cos t} + t\cos(t)e^{\tan t}.$$

(7 P)

4. Geben Sie das grösste Intervall im Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln(\sin(x^2))$ an, welches den Wert $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ enthält und bestimmen Sie die Steigung der Funktion f an der Stelle x_0. **(5 P)**

5. Zeigen Sie, dass die Funktion $x(t) = 5\cos(\ln t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{t} + \frac{x(t)}{t^2} = 0$$

ist. **(4 P)**

Bitte wenden!

6. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in \mathbb{R}^2$ aus ihrem Definitionsbereich. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Tangentialvektor an die Niveaulinie von f durch a und die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ beträgt $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Bestimmen Sie aus diesen Angaben den kleinsten Wert der Richtungsableitung von f im Punkt a und geben Sie die Richtung an, in der dieser Minimalwert angenommen wird. **(6 P)**

7. Die Funktion

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos 2t - 2\sin t \\ \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}\ln t \end{pmatrix}$$

definiert eine Kurve C im Raum. Bestimmen sie zwei Werte t_0, t_1 im Intervall $[0, 2\pi]$ so, dass die Tangente an C in den Punkten $f(t_0)$, $f(t_1)$ parallel zur xz-Ebene ist. **(4 P)**

8. Wir betrachten die Funktionen

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto f(u, v) = \begin{pmatrix} (\sqrt{u})^3 \\ \ln(\frac{u}{v}) \\ v^2 \end{pmatrix}$$

$$g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an.

b) Die Funktion f definiert eine Fläche E im Raum. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an E im Punkt $f(1, 1)$.

c) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h = f \circ g$

i) direkt, das heisst, indem Sie h zuerst explizit angeben.

ii) mit Hilfe der Kettenregel. **(12 P)**

Siehe nächstes Blatt!

9. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{xz} \\ \frac{2y}{z}\ln x \\ f(x,y,z) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Funktion $f(x,y,z)$ so an, dass das Vektorfeld F ein Potentialfeld ist und berechnen Sie dann die Arbeit von F längs des stückweise geradlinig durchlaufenen Weges von $A(1,1,1)$ über $B(3,5,2)$ nach $C(e,3,3)$. **(6 P)**

10. Die Verbindungsstrecken der Punkte $A(4,0,1)$, $B(0,5,2)$ und $C(3,3,3)$ mit dem Ursprung seien die Kanten eines Parallelepipeds (Spat, Parallelflach) P. Berechnen Sie den Fluss von innen nach aussen des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 + x + \cos(y+z) \\ y - 3x^2y + \cos(x+z) \\ \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche von P. **(5 P)**

11. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^x + y^2 \\ 2xy + 1 \\ xyz \end{pmatrix}.$$

a) **i)** Ist das Vektorfeld wirbelfrei?

ii) Ist es ein Potentialfeld?

Begründen Sie Ihre Antworten!

b) Skizzieren Sie die Fläche

$$E:\ (u,v) \mapsto a(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 3 \end{cases}$$

und berechnen Sie die Arbeit von F längs des Randes von E (wählen Sie selbst einen Umlaufsinn).

c) Widerspricht Ihr Resultat unter **b)** nicht Ihrer Feststellung unter **a)ii)**? Kommentieren Sie! **(10 P)**

VIEL ERFOLG!