Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieurwissenschaften, Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!			
Name:			
Vorname:			
Legi Nr.:			

Bitte nicht ausfüllen!
Punkte K

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Total		

Vollständigkeit	
-----------------	--

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- keine Taschenrechner
- kein Handy

- 1. a) Zeichnen Sie in der Gaussschen Zahlenebene zwei beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2 \neq 0$ ein und markieren Sie in Ihrer Figur den orientierten Winkel $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$. (1 P)
 - b) Für die 3 komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3 gelte

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \sqrt{2}, \quad \arg\left(\frac{z_2}{z_1} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left| \frac{z_3}{z_2} \right| = \sqrt{8}, \quad \arg\left(\frac{z_3}{z_2} \right) = \frac{8\pi}{9}.$$
Bestimmen Sie $\left| \frac{z_1}{z_3} \right|$ und $\arg\left(\frac{z_1}{z_3} \right)$. (2 P)

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\tan(x)}$$
 (1 P)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) + \pi}{\tan(x) + 1} \tag{1 P}$$

3. a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve

$$y = f(x) = \ln x - \frac{x}{4}$$

im Punkt (1, f(1)) sowie die x-Koordinate x_1 des Schnittpunktes dieser Tangente mit der x-Achse. (3 P)

b) Fassen Sie a) auf als ersten Schritt im Newton-Verfahren zur Approximation einer Lösung x^* der Gleichung

$$\ln x = \frac{x}{4}$$

und führen Sie den nächsten Schritt des Verfahrens durch, das heisst, bestimmen Sie die nächste Näherung x_2 von x^* . (Logarithmus im Resultat stehen lassen). (2 P)

Bitte wenden!

4. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{t} = \cos(2t), \qquad x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$
 (4 P)

5. a) Bestimmen Sie den kritischen Punkt (m_0, q_0) der Funktion

$$S(m,q) = q^2 + (m+q-2)^2 + (2m+q+1)^2$$

und klären Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen - die Sie notieren - ab, um welche Art von kritischem Punkt es sich dabei handelt. (3 P)

- b) Geben Sie eine Interpretation die Sie durch eine Skizze veranschaulichen der Grössen m_0 und q_0 aus a) im Sinne der Gaussschen Methode der kleinsten Quadrate. (2 P)
- 6. a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = x\sin(xy)$$

im Punkt
$$P(1, \frac{\pi}{2})$$
 in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. (2 P)

- b) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von f im Punkt P am kleinsten und wie gross ist dieser Minimalwert? (2 P)
- 7. Wir betrachten die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2,$$
 $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+,$ $(u, v) \mapsto g(u, v) = e^u v^2$

Bestimmen Sie die Ableitung Dh der zusammengesetzten Funktion $h=g\circ f$

a) direkt, das heisst, indem Sie zuerst die Funktion

$$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad t \mapsto h(t) = g(f(t))$$

b) mit Hilfe der Kettenregel. (2 P)

Siehe nächstes Blatt!

- 8. Geben Sie eine Koordinatengleichung der
 - a) Tangentialebene an die in Parameterdarstellung gegebene Fläche

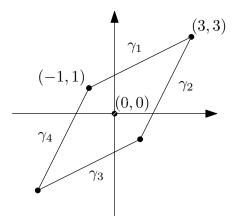
$$a: (u,v) \mapsto a(u,v) = \begin{pmatrix} \ln u \sin v \\ 2\sqrt{u}\cos v \\ u^2v \end{pmatrix}$$

im Punkt $a(1,\pi)$. (3 P)

b) zur (x, y)-Ebene parallelen Tangentialebene an die Niveaufläche zum Wert 1 der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 - 4x + y^2 - 6y + z.$$
 (2 P)

9. Wir betrachten den Rhombus R mit Zentrum im Ursprung und den Ecken (-1,1) und (3,3),



sowie das Vektorfeld

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^2y - 2e^{x^2} \\ -x^2y + e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

- a) Längs welcher Rhombusseiten ist die Arbeit des Vektorfeldes F aus geometrischen Gründen gleich 0? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 P)
- b) Berechnen Sie die Arbeit von F längs des einmal im Uhrzeigersinn durchlaufenen Rhombus R.

Hinweis: Fassen Sie die Integrale zusammen bevor Sie integrieren. (3 P)

c) Geben Sie eine Funktion g(x, y) an, so dass, ersetzt man die erste Komponente von F(x, y) durch g(x, y), ein Potentialfeld entsteht. (2 P)

Bitte wenden!

 ${\bf 10.}$ Wir betrachten das Tetraeder T (dreiseitige Pyramide) mit Ecken im Ursprung und in den Einheitspunkten der Koordinatenachsen, sowie das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} - x \\ -\frac{x^2}{2} + x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss von ${\cal F}$ durch die Oberfläche von ${\cal T}$ (von innen nach aussen)