ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Winter 2014

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Biologie, Biotechnologie, Chemie, Chemieingenieurwissenschaften, Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.
- Bitte schreiben Sie auf alle abgegebenen Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Vergessen Sie nicht, alle Blätter abzugeben.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 handgeschriebene A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **kein** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. **a)** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument aller komplexen Zahlen z, für die gilt

$$\arg\left(\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right) = \frac{5\pi}{3} \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{2z^2(1-i)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}\right| = 8.$$

b) Bestimmen Sie Betrag und Argument aller komplexen Zahlen z, für die gilt

$$\left(\frac{2z}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}\right)^3 = 3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (1+i).$$

(8 P)

2. Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(2-x))^2}{1-e^{x-1}+\ln(x)}.$$

(3 P)

3. Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx.$$

(4 P)

4. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -tx(t) + t^2 e^{-t^2/2}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

(8 P)

5. Bestimmen Sie die Funktion, deren Graph durch die Punkte $(1,2)$ und $(e,3)$ geht und folgende Eigenschaft hat: Für jedes mögliche Argument, das heisst, an jeder Stelle des Definitionsbereichs, ist die Steigung des Graphen proportional zum halben Kehrwert des Produktes aus Argument und Funktionswert. **(6 P)**

Bitte wenden!

6. Lösen Sie für die Funktionen

$$\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}), \qquad \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

die folgenden, weitgehend voneinander unabhängigen Aufgaben.

a) Zeigen Sie, dass gilt

i) $\frac{d}{dt}\cosh(t) = \sinh(t)$.
ii) $1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$.
iii) $\sinh(2t) = 2\sinh(t)\cosh(t)$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Formeln **i)** und **ii)** aus **a)** die Länge des Kurvenbogens

$$y = \cosh(t), \qquad -1 \leq t \leq 1. \qquad \text{(Kettenlinie)}$$

c) Sei

$$f(t) := \cosh(t)\sinh(t).$$

Geben Sie das Taylorpolynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt $t^* = 0$ der Funktion $f(t)$ an. **(14 P)**

7. Gegeben sind das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y^2 - z^2 \\ x^2 - y^2 + 2z^2 \\ 1 + x^2z^2 \end{pmatrix}$$

und der Würfel Q mit den Ecken $A(1,0,1)$, $B(-1,0,-1)$, $C(1,0,-1)$ und $D(1,-2,-1)$. Lösen Sie die folgenden, voneinander unabhängigen Aufgaben:

a) Berechnen Sie den Fluss durch Q von innen nach aussen.

b) Berechnen Sie den Fluss in Richtung der positiven y-Achse durch die Seitenfläche S von Q mit den Eckpunkten A, B, C und $E(-1,0,1)$.

c) Berechnen Sie

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F(x,y,z).$$

(14 P)

Siehe nächstes Blatt!

8. Gegeben seien das Vektorfeld

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -4x \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Schnittkurve Γ der Ebene $y = z$ mit dem geraden Kreiszylinder über dem Grundkreis in der Ebene $z = 0$ mit Mittelpunkt $(2,2,0)$ und Radius 1.

a) Wählen Sie selbst eine Orientierung und berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes g längs Γ

i) direkt.

ii) mit Hilfe des Satzes von Stokes.

b) Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto f(t) := \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ e^{t^2} \\ t\ln(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h(t) := g(f(t))$

i) direkt, das heisst, indem Sie $h(t)$ explizit angeben.

ii) mit Hilfe der Kettenregel. **(18 P)**

9. Wir betrachten die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 \ln y + \frac{y}{z} \ln z.$$

a) Geben Sie sowohl den Definitionsbereich als auch den Gradienten der Funktion f an und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Punkt $P(1,1,1)$.

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $P(1,1,1)$ in Richtung $(3,0,4)^T$. In welcher Richtung wird die Richtungsableitung von f im Punkt P maximal? Geben Sie diesen Maximalwert an.

c) Ist der Punkt $Q(0,1,1)$ ein kritischer Punkt der Funktion f? Begründen Sie Ihre Antwort. **(11 P)**

VIEL ERFOLG!