Serie 2

1. Skalarprodukt, Vektorprodukt, Spatprodukt

a) Der Vektor $(7, a, b)^T$ steht auf den Vektoren $(4, 3, 8)^T$ und $(-5, 20, 9)^T$ senkrecht. Berechne a und b.

b) Gegeben sind die Punkte $A(2/-2/0)$, $B(0/-1/2)$. Gesucht sind die Punkte P auf der y-Achse, so dass $\sphericalangle PAB = \frac{\pi}{4}$.

c) Stelle die Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch den Punkt $P(2/-1/1)$ geht und normal auf den Ebenen $E : 3x + 2y - z + 4 = 0$ und $F : x + y + z - 3 = 0$ steht.

d) Gegeben sind die Punke $A(-2/5/7)$, $B(6/13/3)$, $C(6/6/11)$, $D(-2/11/9)$, $E(12/4/16)$. Bestimme diejenigen Punkte auf der Geraden DE, die von den Geraden AB und AC gleiche Abstände haben.

e) Beweise: für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt $(\vec{u} \times \vec{v})^2 = \vec{u}^2\vec{v}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$.

f) Berechne den Abstand des Punktes $P(2/6/12)$ von der Geraden $3x + 4y - 5 = 0$ der Grundebene.

g) Gegeben sind die Ebenen $4x - 2y - z - 12 = 0,\ 2x + 2y - 5z + 24 = 0$. Welcher Punkt der Schnittgeraden liegt dem Ursprung am nächsten? Wie gross ist sein Abstand vom Ursprung?

2. a) Bestimmen Sie Betrag und Argument der komplexen Zahl $a = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

b) Wir betrachten komplexe Zahlen, respektive die Punkte in der Gaussschen Zahlenebene, welche diese repräsentieren. Bestimmen Sie mit Hilfe von **a)** 2 komplexe Zahlen z_1, z_2 so, dass die Punkte 0, z_1, z_2 ein gleichseitiges Dreieck bilden, wobei der Höhenfusspunkt auf der Seite z_1, z_2 im Punkt $3 - \sqrt{3}i$ liegt.

3. Bestimmen Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktionen

$$f_1(x, y) = \frac{y}{x}; \qquad f_2(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)};$$
$$f_3(x, y) = \ln(x + y); \qquad f_4(x, y) = x^2 + y^2.$$

Diskutieren und skizzieren Sie auch die Niveaulinien und den Graph der 4 Funktionen.

Bitte wenden!

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den nachfolgenden Aufgaben die richtigen Aussagen an.

Wir betrachten die Gleichung

$$z^4 = 81\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}.$$

- ◯ $(-\frac{\sqrt{2}}{3} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ ist eine Lösung.
- ◯ Die Gleichung hat Lösungen mit Argument $\varphi = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.
- ◯ $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}$ ist keine Lösung.
- ◯ $3e^{i\frac{11\pi}{6}}$ ist eine Lösung.

Wir betrachten die Gleichung

$$4z\overline{z} + (z - \overline{z})^2 = 3.$$

- ◯ Diese Gleichung hat nur reelle Lösungen.
- ◯ Diese Gleichung hat nur Lösungen der Form $\mathrm{Re}(z) = 0$.
- ◯ Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen.
- ◯ Für $z = a + ib$ lautet die Gleichung $4a^2 - 3 = 0$

Abgabe: Freitag, 8. März, in den Übungsstunden