Serie 4

1. **a)** Bestimmen Sie von der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x\,y^2 + \ln(y/x)$$

den Definitionsbereich, den Gradienten und die Richtungsableitung im Punkt $A(-1, -4)$ in Richtung $(1, 1)^T$.

b) In welchem Punkt des Strahls $y = 4\,x$, $x < 0$, ist die Richtungsableitung von $f(x, y)$ in Richtung $(1, 1)^T$ am kleinsten? Wie gross ist dieser Minimalwert?

2. Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + 2y^2$ am Punkt $A(2, 1)$.

a) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung der Vektoren $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ und $(2, 1)^T$.

b) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von f im Punkt A am grössten? Berechnen Sie diesen Wert.

c) Ist es möglich, dass f im Punkt A ein lokales Maximum hat, d.h. dass der Wert $f(A)$ grösser ist als alle Funktionswerte von f in der Nähe von A?

d) In welcher Richtung verläuft die Niveaulinie von f durch den Punkt A?

3. Studium der durch die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(v)\cos(u) \\ \cos(v)\sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} 0 \le u < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

parametrisierten Fläche K.

a) Zeigen Sie, dass für alle Parameterwerte (u, v) gilt $|f(u, v)| = 1$.

b) Beschreiben Sie die Koordinatenlinien $v = v_0$: $u \mapsto f(u, v_0)$. Geben Sie eine Symmetrie der Fläche K an.

c) Beschreiben Sie die Koordinatenlinie $u = 0$: $v \mapsto f(0, v)$.

d) Was ist K aufgrund Ihrer Feststellungen a)-c) für eine Fläche? Geben Sie eine „geographische" Interpretation der Koordinatenlinien.

Bitte wenden!

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den folgenden Aufgaben die richtigen Aussagen an.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{y}}$$

Die Richtungsableitung von f im Punkt $P(4, 4)$

- ◯ in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ beträgt $\frac{8}{5}$.
- ◯ in Richtung $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ ist 0.
- ◯ ist in keiner Richtung kleiner als -4.

Wir betrachten die in Parameterdarstellung gegebenen Kurven

$$k_1 : t \mapsto k_1(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad k_2 : t \mapsto k_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und die Fläche $\mathcal{F}$:

$$(u, v) \mapsto a(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos(v) \\ u \sin(v) \\ u^2 - 2 \end{pmatrix} \quad , \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- ◯ $z = x^2 + y^2 - 2$ ist eine Koordinatengleichung, welche $\mathcal{F}$ beschreibt.
- ◯ Die Fläche $\mathcal{F}$ ist rotationssymmetrisch zur z-Achse.
- ◯ Die Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit der (yz)-Ebene ist eine Hyperbel.
- ◯ Die Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit der (xy)-Ebene ist ein Kreis mit Radius 1.
- ◯ Die Kurve k_1 ist eine Gerade, welche $\mathcal{F}$ in den Punkten $(0, 1, -1)$ und $(0, -2, 2)$ durchstösst.
- ◯ Die Kurve k_2 ist eine Ebene Parabel, welche auf der Fläche $\mathcal{F}$ liegt.

Abgabe: Freitag, 22. März, in den Übungsstunden