Serie 5

1. Die Funktion $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $x(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))^T$,

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \cos(u)(3+\cos(v)), \\ x_2(u,v) &= \sin(u)(3+\cos(v)), \\ x_3(u,v) &= \sin(v), \end{aligned}$$

für $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$, beschreibt eine Fläche im Raum.

a) Versuchen Sie sich ein Bild von dieser Fläche zu machen, indem Sie die Kurven beschreiben, die sich ergeben wenn u bzw. v bei festem v bzw. u das Intervall $[0, 2\pi)$ bzw. $[-\pi, \pi)$ durchläuft.

b) Finden Sie die Funktion $g(x,y,z)$, deren Niveaufläche zum Niveau 1 die obige Fläche ist.
Hinweis: $\cos(u)^2 + \sin(u)^2 = 1$.

2. Bestimmen und diskutieren Sie den geometrischen Ort aller Raumpunkte, welche von den Geraden

$$g_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gleichen Abstand haben.

3. Diskutieren und skizzieren Sie die folgenden im Parameterdarstellung gegebenen Kurven. Gehen Sie dabei nach folgendem Rezept vor.
Bestimmen Sie

i) allfällige Symmetrien der Kurve;

ii)/iii) die gemeinsamen Punkte der Kurve mit der $x-$/$y-$Achse;

iv)/v) Punkte mit "horizontaler"/"vertikaler" Tangente;

vi) die Kurvensteigung in allfälligen Ausnahmepunkten als Grenzwert der Steigungen in den Nachbarpunkten.

a) $\begin{cases} x(t) = 2\,\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\,\sin t - \sin 2t \end{cases}$ mit $-\pi \leq t \leq \pi$

Hinweis: $\sin 2t = 2\,\cos t \sin t$
$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\,\sin^2 t = 2\,\cos^2 t - 1$

Bitte wenden!

b) $\begin{cases} x(t) = t^2 - \frac{t^4}{2} \\ y(t) = \frac{4}{3}\, t^3 \end{cases}$ mit $-2 \leq t \leq 2$

c) $\begin{cases} x(t) = 5\, \sin t \\ y(t) = \sin(2\, t - 1) \end{cases}$ mit $0 \leq t \leq 2\,\pi$

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den folgenden Aufgaben die richtigen Aussagen an.

Wir betrachten die in Parameterdarstellung gegebenen Kurven

$$k_1 : t \mapsto k_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{t^2} \\ \sqrt{2}\ln t \end{pmatrix},\ t \neq 0$$

$$k_2 : t \mapsto k_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 1 \\ \ln(\sin t) - 1 \\ \frac{1}{\sin t} - 1 \end{pmatrix}$$

◯ Der Definitionsbereich von k_2 enthält das Intervall $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

◯ Die Normalprojektion von k_1 auf die (xy)-Ebene ist eine Hyperbel.

◯ Die beiden Kurven haben genau einen Punkt gemeinsam und schneiden sich in diesem unter einem Winkel von $60°$.

Wir betrachten die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto h(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \\ g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto g(x, y) := xy \end{aligned}$$

◯ $Dh(t) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

◯ $f := g \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

◯ Für $f := g \circ h$ gilt $Df(t) = 2t$.

◯ Die Niveaulinie von g zum Niveau 2 ist eine Hyperbel.

◯ Die lineare Approximation der Funktion g an der Stelle $(2, 1)$ ist

$$g(2 + h, 1 + k) = 2h + 2k - 4 + \Delta.$$

Abgabe: Freitag, 12. April, in den Übungsstunden