Serie 8

1. Gegeben sei der Bereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25 \text{ und } y \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := y^2 - 2x^2 - 1 .$$

Skizzieren Sie dazu zunächst D.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst alle kritischen Punkte! Vergessen Sie nicht den Rand und die Ecken.

2. Gegeben ist die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion f,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6xy .$$

a) Finden Sie die kritischen Stellen von f.

b) Genügen die Bedingungen $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0 ,$$

(d.h. anschaulich: "sowohl in $\pm x$–Richtung als auch in $\pm y$–Richtung geht es nur aufwärts") um nachzuweisen, dass im Punkt (x_0, y_0) ein lokales Minimum von f vorliegt?

3. Die Fläche $\mathcal{F}$ sei gegeben durch die Koordinatengleichung

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 36$$

a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf $\mathcal{F}$, in denen die Tangentialebene an die Fläche parallel zur Ebene $3x + 2y + 2z - 3 = 0$ ist.

Bitte wenden!

b) Betrachten Sie die Gesamtheit der Punkte auf $\mathcal{F}$, für welche $z \geq 0$ ist. Fassen Sie diese Punktmenge auf als Bild (Graph) einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. In welche Richtung ist die Richtungsableitung von g im Punkt $(1, 2)$ minimal und wie gross ist dieser Minimalwert?

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den folgenden Aufgaben die richtigen Aussagen an.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- ◯ $\operatorname{grad} f(a, b) = 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass $P(a, b)$ ein Sattelpunkt ist.
- ◯ Zu sagen "$\operatorname{grad} f(a, b) = 0$ ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass $P(a, b)$ ein lokales Extremum ist." bedeutet: Immer wenn $\operatorname{grad} f(a, b) = 0$ ist, dann ist $P(a, b)$ ein lokales Extremum.
- ◯ Die obige (in Anführungszeichen stehende) Implikation ist falsch.
- ◯ Eine hinreichende Bedingung ist immer auch eine notwendige Bedingung.
- ◯ Es gibt Beispiele von notwendigen Bedingungen, die nicht hinreichend sind.

Die Richtungsableitung in einem Punkt P einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ den Wert 1 und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Tangentialvektor an die Niveaulinie von f durch P.

- ◯ Dann ist der kleinste Wert der Richtungsableitung von f in P gleich $-\sqrt{5}$ und er wird angenommen in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Fläche $\mathcal{F}$ sei in Parameterdarstellung gegeben durch

$$\mathcal{F} : (u, v) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(u, v) \in \mathbb{R}^3$$

- ◯ $2\,(-2f_u \times 3f_v)_{(a,b)}$ ist ein Normalvektor der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ im Punkt $P(a, b)$.

Die Fläche $\mathcal{F}$ sei das Bild einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

- ◯ $\mathcal{F}$ ist die Niveaufläche der Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ g(x,y,z) = f(x,y) - z$ zum Wert 0.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy^2 - \frac{x}{4}$ und den Bereich $D = \left\{(x,y) \middle| |x| \leq 1,\ |y| \leq \frac{2}{3}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

- ◯ Der Bereich D ist ein achsenparalleles Rechteck.
- ◯ Die Funktion f hat genau drei kritische Punkte, welche alle in D liegen.
- ◯ Auf dem Randstück $x = 1$ von D gilt $\frac{1}{4} \leq f(x,y) \leq \frac{25}{36}$.
- ◯ Das Maximum von f auf dem Rand von D beträgt $M = \frac{3}{4}$, das Minimum $m = -\frac{49}{72}\frac{1}{36}$.
- ◯ Das globale Maximum von f auf D wird auf dem Rand angenommen und ist somit gleich M. Das globale Minimum wird in einem kritischen Punkt angenommen und beträgt $-\frac{1}{32}$.
- ◯ Einer der kritischen Punkte ist ein globales und damit lokales Minimum. Die anderen liegen auf der Niveaulinie von f zum Wert 0.
- ◯ Auch ein Punkt, in dem der Funktionswert 0 ist, kann ein lokales oder globales Maximum einer Funktion sein. Für die Funktion f ist dies aber nicht der Fall.

Abgabe: Freitag, 3. Mai, in den Übungsstunden