Serie 9

1. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes F entlang des Weges γ:

a) $F(x,y) = (x,y)^T$, γ: Strecke von $(1,0)$ nach $(0,2)$.

b) $F(x,y) = (xy,-y)^T$, $\gamma(t) = (t,t^2)$, $t \in [0,1]$.

c) $F(x,y) = (2x-y, x+2y)^T$, γ: Einheitskreis zentriert im Ursprung, positiv orientiert.

d) $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)^T$, γ: Ellipse $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$, positiv orientiert. Skizzieren Sie die Ellipse!

e) Parametrisieren Sie in mindestens einer der obigen Aufgaben den Weg γ auf eine zweite Art und überzeugen Sie sich, dass dadurch das Linienintegral seinen Wert nicht ändert.

2. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes $F = (xy, 2x^2)^T$ von (0,0) bis (1,2) entlang der Kurven

a) $y = 2x$, **b)** $y = 2x^2$, **c)** $y^2 = 4x$.

Was stellen Sie fest?

3. Gegeben seien die Kurve γ mit der Parametrisierung

$$\gamma(t) = \left(\frac{\pi}{2} + t\right)(\cos(2t), \sin(2t))^T \ , \ t \in [0,\pi]$$

und das Vektorfeld

$$F(x,y) = (\sin y, x\cos y)^T.$$

a) Skizzieren Sie die Kurve γ.

b) Ist F ein Potentialfeld?

Bitte wenden!

c) Berechnen Sie $\int\limits_{\gamma} F$.

4. Online-Abgabe

Kreuzen Sie in den folgenden Aufgaben die richtigen Aussagen an.

Zwei Flächen heissen *orthogonal*, wenn ihre Tangentialebenen in allen Schnittpunkten jeweils senkrecht zueinander stehen. Es seien $a, b, c > 0$.
Welche der folgenden Systeme von Flächen sind (paarweise) orthogonal?

- ◯ $x^2 + y^2 + z^2 = a\,x,\;\; x^2 + y^2 + z^2 = b\,y,\;\; x^2 + y^2 + z^2 = c\,z.$
- ◯ $x\,y = a\,z^2,\;\; x^2 + y^2 + z^2 = b,\;\; z^2 + 2\,x^2 = c\left(z^2 + 2\,y^2\right),\;\; z > 0.$
- ◯ $x\,y = a\,z,\;\; \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = b,\;\; \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2} = c,\;\; z > 0.$
- ◯ $x\,y\,z = a^3,\;\; z^2 = x^2 + y^2 + b^{x^2 - y^2},\;\; z^2 = x^2 + y^2 - c^{x^2 - y^2}.$

Sei $a > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ◯ Die Tangentialebenen an die Fläche $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ bilden auf den Koordinatenachsen Abschnitte, deren Summe konstant ist.
- ◯ Die Tangentialebenen an die Fläche $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ bilden auf den Koordinatenachsen Abschnitte, deren Quadratsumme konstant ist.
- ◯ Die Tangentialebenen an die Fläche $x\,y\,z = a^3$ bilden mit den Koordinatenebenen Tetraeder von konstantem Volumen.
- ◯ Die Normalen der Schraubenfläche

  $$x = u\,\cos v, \quad y = u\,\sin v, \quad z = a\,v, \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

  bilden mit der z-Achse einen konstanten Winkel.

Es sei $F(x, y) = (xy, y - x)^T$.
Die von F verrichtete Arbeit vom Punkt $A(0, 0)$ zum Punkt $B(1, 1)$

- ◯ entlang der Kurve $y = x$ ist $< \frac{1}{2}$.
- ◯ entlang der Kurve $y = x^2$ ist $< \frac{1}{10}$.

Siehe nächstes Blatt!

◯ entlang der Kurve $y^2 = x$ ist $> \frac{1}{2}$.

◯ entlang der Kurve $y = x^3$ ist $< -\frac{1}{10}$.

Gegeben seien die folgenden Funktionen von zwei Variablen:

$$\phi(x,y) = C, \quad \psi(x,y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad \chi(x,y) = x^2 + y^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aufgaben besitzt eine Lösung?

◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \phi$ und $f_y(x,y) \equiv \psi$.

◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \psi$ und $f_y(x,y) \equiv \phi$.

◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \phi$ und $f_y(x,y) \equiv \chi$.

◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \chi$ und $f_y(x,y) \equiv \phi$.

Es sei g eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Für welche der folgenden Vektorfelder F lässt sich die Arbeit von F entlang eines beliebigen Weges allein durch die (Werte der) Funktion g ausdrücken?

◯ $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(xy)\,y \\ f(xy)\,x \end{pmatrix}$.

◯ $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x) + y \\ f(y) + x \end{pmatrix}$.

◯ $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x+y) + f(x-y) \\ f(x+y) - f(x-y) \end{pmatrix}$.

◯ $F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{f\left(\frac{y}{x}\right)y}{x^2} & \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)x}{x^2} \end{pmatrix}^T$.

Abgabe: Freitag, 10. Mai, in den Übungsstunden