Serie 10

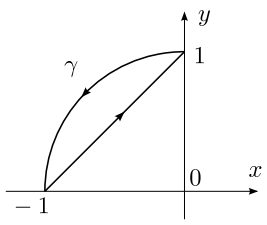
1. (Basisprüfung Herbst 2005) Wir betrachten die Vektorfelder

$$F_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + \cos x \cos y \\ x^2 - \sin x \sin y \end{pmatrix} \; ; \; F_2(x,y) = \begin{pmatrix} -xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix} .$$

a) Sind die Vektorfelder F_1 respektive F_2 wirbelfrei? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Sind die Vektorfelder F_1, F_2 Potentialfelder? Geben Sie, wenn nein eine Begründung, wenn ja eine Potentialfunktion an.

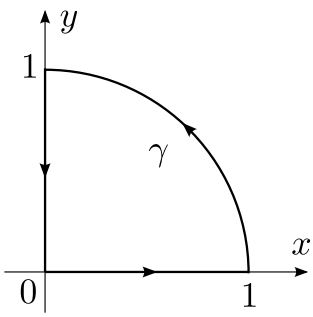
c) Berechnen Sie die Arbeit beider Vektorfelder F_1 und F_2 (unter Beachtung Ihrer Antwort in Teilaufgabe b)) längs des Weges γ (siehe Figur).



2. a) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x - xy \\ y \end{pmatrix}$$

längs des Weges γ.



Bitte wenden!

b) Ist F ein Potentialfeld? Geben Sie zwei verschiedene Begründungen Ihrer Antwort.

3. Gegeben sei der Bereich $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 0, \quad 2y + x^2 \leq 0\}$.
Skizzieren Sie zunächst D. Berechnen Sie dann das Integral

$$\iint\limits_D \left(\sqrt{-y} + x\right) \, dx \, dy$$

nach beiden Integrationsreihenfolgen.

4. Online-Abgabe

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Es seien ein Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und zwei Vektorfelder $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ gegeben. Der Laplace Operator $\triangle$ sei definiert durch

$$\triangle f(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(x, y, z)$$

Dann gilt

- ◯ $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
- ◯ $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \triangle f$
- ◯ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$
- ◯ $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \begin{pmatrix} \triangle F_1 \\ \triangle F_2 \\ \triangle F_3 \end{pmatrix}$
- ◯ $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F$
- ◯ $\operatorname{grad}(\operatorname{div} F) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) + \begin{pmatrix} \triangle F_1 \\ \triangle F_2 \\ \triangle F_3 \end{pmatrix}$
- ◯ $\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$

Siehe nächstes Blatt!

Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\sin x\cos x + y\ln z \\ x\ln z \\ \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

◯ Das Feld F ist wirbelfrei.

Eine Potentialfunktion von F ist die Funktion $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

◯ $V(x,y,z) = \sin^2 + xy\ln z$

◯ $V(x,y,z) = \sin 2x + \frac{xy}{z}$

◯ $V(x,y,z) = -\cos^2 + xy\ln z + 1$

◯ $V(x,y,z) = \sin 2x + xy\ln z + 3$

◯ $V(x,y,z) = \sin^2 + xy\ln z + \sin^2 z + \cos^2 2$

Welches der folgenden Integrale ist NICHT gleich den anderen?

◯ $\int_0^1 \int_0^x x\,dydx$

◯ $\int_0^1 \int_0^y x\,dxdy$

◯ $\int_0^1 \int_0^y y\,dxdy$

◯ $\int_0^1 \int_y^1 x\,dxdy$

Abgabe: Freitag, 17. Mai, in den Übungsstunden