Serie 11

1. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y,z) = y^2 + z^2$ über das Tetraeder B mit den Ecken $(0,0,0)$; $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$.

(Massenträgheitsmoment von B (Dichte 1) bezüglich der $x-$Achse).

Rezept:

1. Skizzieren Sie B. "Schöpfen Sie B durch Schnitte senkrecht zur $x-$Achse aus".
2. Diese Schnitte, d.h. die $x-$Koordinaten der Punkte in B variieren zwischen a und b.
3. Bei festem x variieren die $y-$Koordinaten der Punkte in B zwischen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$.
4. Bei festem x und y variieren die $z-$Koordinaten der Punkte in B zwischen $\gamma(x,y)$ und $\delta(x,y)$.

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int\limits_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx\,.$$

2. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx\,.$$

a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

b) Betrachten Sie die Koordinatentransformation $x + y = u$, $y = u\,v$. Zeichnen Sie die Koordinatenlinien in die obige Skizze ein und bestimmen Sie die Integrationsgrenzen in den Variablen u, v.

c) Transformieren Sie nun das Integral, um es dann zu berechnen.

Bitte wenden!

3. Sei Ω der von den Kurven

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad \text{und} \quad x^2 - y^2 = 4$$

eingeschlossene Bereich im ersten Quadranten, und sei

$$f(x, y) := xy.$$

Berechnen Sie

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy.$$

4. Online-Abgabe

Entscheiden Sie über den Wahrheitsgehalt der folgenden Aufgaben.

Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- ○ $I = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$
- ○ $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\, dy$
- ○ $I = \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{1/\cos\phi} \varrho^2\, d\varrho$
- ○ $I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

Das Integral der Funktion $f(x, y) := \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ über die Menge $B := \big\{(x, y) \,|\, x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\big\}$ ist:

- ○ $\int_B f\, dxdy = \frac{2}{3}\pi$
- ○ $\int_B f\, dxdy = \frac{4}{3}\pi$
- ○ $\int_B f\, dxdy = \frac{16}{3}\pi$
- ○ $\int f\, dxdy = 8\pi$
- ○ $\int_B f\, dxdy = \frac{32}{3}\pi$

Siehe nächstes Blatt!

Es sei B ein Bereich in der (x, y)-Ebene und $\tilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der (r, ϕ)-Ebene. Dann gilt

- ○ $\int_B xy\, dxdy = \int_{\tilde{B}} r \cos\phi \sin\phi\, drd\phi$
- ○ $\int_B xy\, dxdy = \int_{\tilde{B}} r^2 \cos\phi \sin\phi\, drd\phi$
- ○ $\int_B xy\, dxdy = \int_{\tilde{B}} r^3 \cos\phi \sin\phi\, drd\phi$
- ○ $\int_B xy\, dxdy = \int_{\tilde{B}} r^3 \cos^2\phi\ \sin\phi\, drd\phi$
- ○ $\int_B xy\, dxdy = \int_{\tilde{B}} 2\pi r^2 \cos\phi \sin\phi\, drd\phi$

Abgabe: Freitag, 24. Mai, in den Übungsstunden