Serie FERIEN

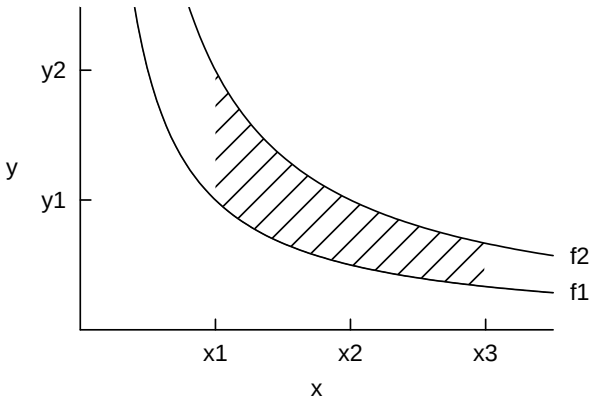
1. Integrieren Sie $f(x, y, z) = yz$ über den im ersten Oktanten $x \geq 0$, $y \geq 0$ und $z \geq 0$ befindlichen Teil des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^{3/2} y$$

über den in der Figur schraffierten Bereich,



wobei

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, x_2 = 2, x_3 = 3 \\ y_1 &= 1, y_2 = 2 \\ f_1 &= \frac{1}{x} \\ f_2 &= \frac{2}{x}, \end{aligned}$$

sowohl direkt als auch mit Hilfe der Substitution

$$u = x, \qquad v = xy.$$

Bitte wenden!

3. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds

$$v(x,y,z) = (x \cdot (1-e^z), 0, e^z)^T$$

von innen nach aussen durch die halbe Sphäre

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}\ .$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Gauss auf die Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

an.

4. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z \end{pmatrix}$$

und das Dreieck D mit den Ecken $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$.

a) Ist das Vektorfeld F wirbelfrei? Begründen Sie Ihre Antwort! Berechnen Sie die Arbeit von F längs des Randes von D (von A über B und C nach A).

b) Bestimmen Sie den Fluss von F sowohl durch das Dreieck D als auch durch die Oberfläche des Tetraeders mit Grundfläche D und Spitze $(0,1,0)$.

5. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss und unter Einführung neuer geeigneter Koordinaten den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} z \sin(y) \\ xz\cos(y) \\ ze^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des geraden Kreiszylinders mit Höhe 3 und Grundkreis

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leq 2, z = 0\}.$$

Orientieren sie die Oberfläche so, dass die Normale nach aussen zeigt.
Hinweis: $\frac{d}{dr}\left(e^{r^2}\right) = ?$

6. Lösen Sie folgende Aufgaben für die Vektorfelder

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(x) \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2}x \\ -2z + xyz \\ 2y + \frac{y^2}{2}x \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot} F(x,y,z)$ und $\operatorname{rot} G(x,y,z)$.

b) Geben Sie eine spezielle geometrische Eigenschaft der Vektoren von $\operatorname{rot} F(x,y,z)$ und zwei spezielle Eigenschaften der Vektoren von $\operatorname{rot} G(x,y,z)$ an.

c) Mit dem Satz von Stokes: Wie gross ist aufgrund Ihrer Feststellung unter b) die Arbeit des Vektorfeldes $F(x,y,z)$ resp. $G(x,y,z)$ längs eines ebenen geschlossenen Weges γ, der in einer Normalebene zur x-Achse liegt? Begründen Sie Ihre Antwort.

7. **a)** Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + \frac{3}{z} \\ x^2 + 3y \\ -y^2 + z \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Kegels mit Grundkreis $K = \{(x,y,0) | x^2 + y^2 = 9\}$ und Spitze $S(1,5,3)$.

b) Begründen Sie rein geometrisch, dass der Fluss des Vektorfeldes

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - 3yz \\ x^2 - 3yz \\ x^2 - 3yz \end{pmatrix}$$

durch das Dreieck mit den Ecken $(0,0,0)$; $(1,1,1)$; $(2,3,-4)$ gleich Null ist.

8. **a)** Bestimmen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + 3x^2 z \\ x + 2yz \\ x^3 + y^2 + z \end{pmatrix}$$

längs der Strecke von $A(0,0,0)$ nach $B(1,0,2)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes und Ihres Resultats in Teilaufgabe a) die Arbeit des Vektorfeldes $V(x,y,z)$ längs des geradlinigen Weges von B über $C(4,1,0)$ nach A.

Diese Serie wird nicht mehr eingezogen.