Musterlösung zur Prüfung

1. Die Gleichgewichtslösungen entsprechen den Nullstellen der Funktion **(3 P)**

$$f(x) = \ln(x) - 1,$$

daher findet man die Gleichgewichtslösung

$$x = e.$$

Die Lösungen nahe des Gleichgewichts verhalten sich wie

$$x(t) = e + \xi(t), \quad |\xi(t)| \,\text{klein},$$

also gilt

$$\dot{x}(t) = \dot{\xi}(t).$$

Linearisieren liefert

$$\dot{\xi}(t) = f(e + \xi(t)) \simeq f(e) + \xi(t) f'(e) = \frac{\xi(t)}{e}.$$

Aus

$$f'(e) = \frac{1}{e} > 0$$

folgt, dass es sich um ein instabiles Gleichgewicht handelt.

2. Aus der ersten Gleichung erhält man **(4 P)**

$$\begin{aligned}
& (\ln(\frac{x}{e^2}))^2 + \ln(\frac{e}{y^4}) + \ln(x)\ln(\frac{1}{x}) = e^{\ln 5} \\
\Leftrightarrow\quad & (\ln(x) - \ln(e^2))^2 + (\ln(e) - \ln(y^4)) + \ln(x)(\ln(1) - \ln(x)) = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & (\ln(x) - 2)^2 + (1 - 4\ln(y)) - (\ln(x))^2 = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & (\ln(x))^2 - 4\ln(x) + 4 + 1 - 4\ln(y) - (\ln(x))^2 = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & -4\ln(x) = 4\ln(y) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{x} = y.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned}
& e^x e^{x+\frac{6}{x}} = (e^2)^4 e^{(\frac{1}{x})^2} e^{2x} \\
\Leftrightarrow \quad & e^{2x+\frac{6}{x}} = e^{8+\frac{1}{x^2}+2x} \\
\Leftrightarrow \quad & 2x + \frac{6}{x} = 8 + \frac{1}{x^2} + 2x \\
\Leftrightarrow \quad & -8x^2 + 6x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-16} \\
\Rightarrow \quad & x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Somit erfüllen die Zahlenpaare $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ das Gleichungssystem.

3. a) Sei $z = re^{i\varphi}$. r kann sofort abgelesen werden, da **(6 P)**

$$|z| = r = 1.$$

Weiter ist

$$\arg(e^{i\varphi}) = \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Die gesuchte komplexe Zahl ist demnach

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

b) Wir gehen wieder in die Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$. Die Länge des gedrehten Vektors ändert sich nicht und beträgt

$$r = \sqrt{32+12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Das Argument des nicht gedrehten Vektors findet man aus

$$\cos\varphi = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}.$$

Eine Drehung um 120° dieses Vektors entspricht der Multiplikation mit $e^{i\frac{2\pi}{3}}$:

$$(4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}})e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Daraus ergibt sich für den Bildpunkt

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Setze

$$x = \cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Dann ist

$$1-x^2 = \sin^2\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{1-x^2}.$$

Also

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} &= \frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)}{\cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)} \\ &= \tan\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Auflösen nach x liefert dann

$$x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)^2 + 1}}.$$

4. Mit Separation der Variablen findet man **(4 P)**

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t^3\frac{dx}{dy} &= -x(t)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}\,dx &= -\int t^{-3}\,dt \\ x^{\frac{5}{2}} &= \frac{1}{2}t^{-2} + C,\end{aligned}$$

also ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x(t) = \left(\frac{1}{2t^2} + C\right)^{\frac{2}{5}}.$$

Die Anfangsbedingung liefert für die Konstante

$$x(1) = 1 = \left(\frac{1}{2} + C\right)^{\frac{2}{5}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2},$$

und somit lautet die Lösung für das gegebene Anfangswertproblem

$$x(t) = \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}.$$

Bitte wenden!

5. **a)** Mit **(9 P)**

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

folgt

$$\frac{1}{2}\left(\cos(2t) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2it} + e^{-2it} + 2}{2}\right) = \frac{e^{2it} + e^{-2it} + 2}{4} = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \cos^2(t).$$

b) **i)** Aus

$$y(t) = \frac{\pi + 2}{8} = \frac{1}{4}\left(\sin(2t) + 2t\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{\pi}{2} = \sin(2t) + 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{4}$$

folgt

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

und somit ist $\left(0, \frac{\pi + 2}{8}\right) \in \mathcal{C}$.

Der Tangentenvektor ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und daraus ergibt sich für die Steigung der Tangente

$$m(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\cos(2t) + 1}{-\sin(2t)}$$

und im Punkt $\left(0, \frac{\pi + 2}{8}\right)$ also

$$m\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) + 1}{-\sin(\frac{\pi}{2})} = -1.$$

ii) Die Punkte mit vertikaler Tangente (also parallel zur y -Achse) müssen die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{n\pi}{2}, n \in \{0, 1, 2\} \\ \Rightarrow \quad & t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}, \quad t_3 = \pi. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Parameterdarstellung der Kurve liefert die Punkte

$$\left(\frac{1}{4}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

iii) Wegen

$$x(-t) = \frac{1}{4}\cos(-2t) = \frac{1}{4}\cos(2t) = x(t)$$

und

$$y(-t) = \frac{1}{4}(\sin(-2t) - 2t) = \frac{1}{4}(-\sin(2t) - 2t) = -\frac{1}{4}(\sin(2t) + 2t) = -y(t)$$

ist die Kurve symmetrisch zur x-Achse.

iv) Die Länge der Kurve im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ beträgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|\, dt &= \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \right| dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sin(2t)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4}\sin^2(2t) + \frac{1}{4}\cos^2(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos(2t) + 1\right)} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2(t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} |\cos(t)|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos(t)\, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} \cos(t)\, dt \\
&= \sin(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin(t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin(t)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{0} \\
&= \sin\frac{\pi}{2} - \sin(0) - \sin(\frac{3\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(0) - \sin(\frac{3\pi}{2}) = 4.
\end{aligned}$$

6. Der Ansatz $x(t) = Ct^\alpha$ führt auf **(9 P)**

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= C\alpha t^{\alpha-1} \\
\ddot{x}(t) &= C\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}.
\end{aligned}$$

Damit wird die erste Gleichung zu

$$\begin{aligned}
& C\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + C\frac{2}{t}\alpha t^{\alpha-1} - C\frac{6}{t^2}t^\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + 2\alpha t^{\alpha-2} - 6t^{\alpha-2} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 6) = 0.
\end{aligned}$$

Diese hat folgende Lösungen:

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -3.$$

Bitte wenden!

Somit ergibt sich für die reelle Lösungsschar der ersten Gleichung

$$x(t) = C_1 t^2 + \frac{C_2}{t^3}.$$

Für die zweite Gleichung findet man

$$\begin{aligned} & C\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - C\frac{1}{t}\alpha t^{\alpha-1} + \frac{5}{t^2}t^\alpha = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - \alpha t^{\alpha-2} + 5t^{\alpha-2} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t^{\alpha-2}(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 6) = 0. \end{aligned}$$

Diese hat folgende Lösungen

$$\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} \quad \Rightarrow \alpha_{1,2} = 1 \pm 2i$$

und führt auf

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 t^{1+2i} + C_2 t^{1-2i} \\ &= tC_1 t^{2i} + tC_2 t^{-2i} \\ &= tC_1 e^{2i\ln t} + tC_2 e^{-2i\ln t} \\ &= tC_1\cos(2\ln t) + itC_1\sin(2\ln t) + tC_2\cos(2\ln t) - itC_2\sin(2\ln t). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die reelle Lösungsschar der zweiten Gleichung

$$x(t) = At\cos(2\ln t) + B\sin(2\ln t),$$

mit $A := C_1 + C_2$ und $B := C_1 - C_2$.

7. a) Die Funktion ist auf der Menge **(11 P)**

$$\mathbb{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y \geq 0\}$$

definiert. Die kritischen Punkte erfüllen

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sqrt{y} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sie befinden sich also auf der Linie

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Global gesehen sind die kritischen Punkte Minima, da die Funktion stets positiv ist.

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Richtungsableitung ist maximal, wenn sie parallel zum Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\sqrt{y} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

ist. Auf der Geraden $x = 2$ bedeutet dies in Richtung von

$$\operatorname{grad} f(2,y) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{y} \\ \frac{2}{\sqrt{y}}. \end{pmatrix}$$

Um den Punkt zu finden, in welchem die Richtungsableitung am kleinsten ist, definieren wir eine neue Funktion,

$$g(y) := |\operatorname{grad} f(2,y)|^2 = 16y + \frac{4}{y},$$

und minimieren diese:

$$g'(y) = 16 - \frac{4}{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}.$$

Da $y > 0$ sein muss, ist nur die positive Lösung zulässig. Der gesuchte Punkt ist somit $(2, \frac{1}{2})$. Die Richtungsableitung an dieser Stelle beträgt

$$\left\langle \operatorname{grad} f(2,\frac{1}{2}), \frac{\operatorname{grad} f(2,\frac{1}{2})}{|\operatorname{grad} f(2,\frac{1}{2})|} \right\rangle = |\operatorname{grad} f(2,\frac{1}{2})| = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

und zeigt in Richtung des Gradienten an dieser Stelle:

$$\frac{\operatorname{grad} f(2,\frac{1}{2})}{|\operatorname{grad} f(2,\frac{1}{2})|} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

c) Die gesuchte Menge ist von der Form

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \mid (x,y) \in \mathbb{D}_f\}.$$

Die Fläche ist also gegeben durch

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) = f(x,y) - z = 0.$$

Mit

$$\operatorname{grad} u(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sqrt{y} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

ergibt sich für die Koordinatengleichung der Tangentialebene im Punkt $(2,4,f(2,4)) = (2,4,8)$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x\sqrt{y} \\ \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \\ -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(2,4,8)}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-8 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-8 \end{pmatrix} \right\rangle = 8x+y-z+12 = 0.$$

d) i) Mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(t) = f(g(t)) = f(\ln t, t^2) = (\ln t)^2 \cdot \sqrt{t^2} = t(\ln t)^2$$

ergibt sich für die Ableitung mit Hilfe der Produktregel

$$h'(t) = (\ln t)^2 + t \cdot 2\ln t \cdot \frac{1}{t} = (\ln t)^2 + 2\ln t.$$

ii) Anwenden der Kettenregel liefert

$$dh(t) = df(g(t)) \cdot dg(t),$$

wobei

$$df(x,y)\Big|_{g(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{g(t)} = \begin{pmatrix} 2x\sqrt{y} & \frac{x^2}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}\Bigg|_{g(t)} = \begin{pmatrix} 2t\ln t & \frac{(\ln t)^2}{2t} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

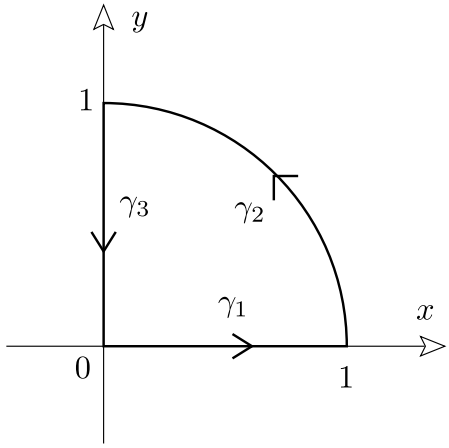
und

$$dg(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} 2t\ln t & \frac{(\ln t)^2}{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t \end{pmatrix} = 2t\ln t \cdot \frac{1}{t} + \frac{(\ln t)^2}{2t} \cdot 2t = 2\ln t + (\ln t)^2.$$

8. a) i) Wir zerlegen den Weg γ in die Teilstücke $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ **(12 P)**



Siehe nächstes Blatt!

Für die entsprechende Parametrisierung findet man

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, & t &\to \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, & \dot\gamma_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\\
\gamma_2 &: [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2\,, & t &\to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, & \dot\gamma_2(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix};\\
\gamma_3 &: [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, & t &\to \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}, & \dot\gamma_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Arbeit

$$\begin{aligned}
A &= \int_\gamma F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F\\
&= \int_0^1 \langle F(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t)\rangle\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle F(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t)\rangle\, dt + \int_0^1 \langle F(\gamma_3(t)), \dot\gamma_3(t)\rangle\, dt\\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\cos^2 t)\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t \cos t\, dt + \int_0^1 t-1\, dt.
\end{aligned}$$

Das erste Integral lässt sich zum Beispiel mittels partieller Integration berechnen:

$$\begin{aligned}
I &= \int (1-\cos^2 t)\sin t\cos t\, dt = \int \sin^3 t \cos t\, dt =\\
&= \sin^3 t \sin t - \int 3\sin^2 t \cos t \sin t\, dt\\
&= \sin^4 t - 3\int \sin^3 t\cos t\, dt = \sin^4 t - 3I\\
\Leftrightarrow I &= \frac{\sin^4 t}{4}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\sin t\cos t\, dt = \frac{\sin^4 t}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^4(\frac{\pi}{2})}{4} - \frac{\sin^4(0)}{4} = \frac{1}{4}.$$

Für das zweite Integral erhält man

$$\int_0^1 t-1\, dt = \frac{1}{2}t^2 - t\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Die Arbeit beträgt also

$$A = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Bitte wenden!

ii) Der Satz von Stokes besagt

$$A = \int_\gamma F = \iint_S \langle (a_u \times a_v), \operatorname{rot} F(a(u,v)) \rangle \, du dv$$

wobei S die von γ umschlossene Fäche, $a(u,v)$ die Parametrisierung der Fläche und $a_u \times a_v$ die Flächennormale bezeichnen.

In unserem Fall ergibt sich für die Rotation von $F = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x^2)y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x^2)y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(1-x^2)y \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2xy \end{pmatrix}.$$

Wir parametrisieren die Kreisscheibe wie folgt:

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\varphi) \mapsto a(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{matrix} 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right|.$$

Somit sind

$$a_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

und der Normalenvektor ist

$$a_r \times a_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Schliesslich liefert der Satz von Stokes für die Arbeit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2r^2\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 -2r^3 \cos\varphi \sin\varphi \, dr d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos\varphi\sin\varphi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^{\pi} \sin u \, du = \frac{1}{8} \cos u \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}.$$

b) Einerseits ist, wie in **a)** berechnet, die Arbeit längs des gschlossenen Weges ungleich Null. Andererseits ist Wirbelfreihiet, $\operatorname{rot} F = 0$, eine notwendige Bedingung für ein Potentialfeld, und auch dies ist hier, wie aus **a)ii)** ersichtlich, nicht der Fall.

Siehe nächstes Blatt!

c) Ist F ein Potentialfeld, so existiert eine Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ (1-x^2)y \end{pmatrix} = \operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Das heisst,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= (1-x^2)y \quad \Rightarrow \quad V(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2)y^2 + C(x) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} &= -xy^2 + C'(x) = g(x,y). \end{aligned}$$

9. Die Randkurven legen folgende Wahl der neuen Variablen nahe: **(6 P)**

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = yx^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} uv = y^2 \quad &\Rightarrow \quad y = \sqrt{uv} \\ \frac{v}{u} = x^4 \quad &\Rightarrow \quad x = \left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Für die Jakobimatrix erhält man

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{v}{u^2}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{u} \\ \frac{1}{2}(uv)^{-\frac{1}{2}}v & \frac{1}{2}(uv)^{-\frac{1}{2}}u \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante beträgt

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{8}\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{3}{4}}(uv)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{u}\right) - \left(\frac{1}{8}\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{3}{4}}(uv)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{u}\right)\right) \\ =&-\frac{1}{8}\left(\frac{u}{v}\right)^{-\frac{3}{4}}(uv)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{1}{4}}(uv)^{-\frac{1}{2}} \\ =&-\frac{1}{4}u^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{4}}v^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}v^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Somit ergib sich für das Flächenintegral

$$\begin{aligned} \iint\limits_B -4\sqrt{y}\,dxdy &= \int_1^4\int_1^5 -4(uv)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}v^{-\frac{1}{4}}\,dvdu \\ &= \int_1^4\int_1^5 u^{-\frac{1}{2}}\,dvdu = \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}v\Big|_1^5\,du = 4\int_1^4 u^{-\frac{1}{2}}\,du \\ &=8(\sqrt{4}-\sqrt{1}) = 8(2-1) = 8. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

10. **a)** Aus der Ebenengleichung entnimmt man, dass $(1,1,1)$ ein Normalenvektor auf k ist. Da der Fluss eines Vektorfeldes **(6 P)**

$$\Phi = \iint\limits_k F \cdot n \, d\sigma$$

beträgt, verscchwindet er, wenn $F \perp n$, also wenn

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Das heisst

$$x^2 + y + 1 + g(x,y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y,z) = -1 - x^2 - y.$$

b) Da die Oberfläche des Kegels ein abgeschlossenes Gebiet ist, lässt sich der Satz von Gauss anwenden:

$$\Phi_G = \iiint\limits_K \operatorname{div} F_2 \, d^3x = \iint\limits_{\partial K} \langle F_2, n \rangle \, d\sigma.$$

Sei c die Divergenz von von F_2. Dann ergibt sich

$$1 = c \iiint\limits_K \operatorname{div} F_2 \, d^3x = \frac{1}{3}\pi r^2 h c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{\pi r^2 h}$$

wobei $r = 1$ der Radius von k und h die Höhe von K sind, mit

$$h = |(2,2,2) - (1,1,1)| = |(1,1,1)| = \sqrt{3}.$$

Also ist

$$c = \frac{3}{\pi\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$

Somit ist der Fluss durch den Kegel für das Vektorfeld

$$F_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\pi} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gleich 1.