ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2012

Musterlösung zur Prüfung

1. a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+(x+1)\ln(x+1)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int 3^x\cos(x)\mathrm{d}x &= 3^x\sin(x)-\int \ln(3)3^x\sin(x)\mathrm{d}x\\
&= 3^x\sin(x)+\ln(3)3^x\cos(x)-\int \ln(3)^2 3^x\cos(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int 3^x\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{3^x}{1+\ln(3)^2}(\sin(x)+\ln(3)\cos(x))$$

Bitte wenden!

2. a) i)

$$\begin{aligned} \mathrm{i} &= \frac{z-3\mathrm{i}-3}{z+2+4\mathrm{i}} \\ &= \frac{z+2+4\mathrm{i}-5-7\mathrm{i}}{z+2+4\mathrm{i}} \\ &= 1-\frac{5+7\mathrm{i}}{z+2+4\mathrm{i}} \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{5+7\mathrm{i}}{z+2+4\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i} \\ \Leftrightarrow \quad & z+2+4\mathrm{i} = \frac{5+7\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(5+7\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = -1+6\mathrm{i} \\ \Leftrightarrow \quad & z = -3+2\mathrm{i} \end{aligned}$$

ii)

$$27\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}} = -27\mathrm{i} = z^3 = (|z|\mathrm{e}^{\arg(z)\mathrm{i}})^3 = |z|^3\mathrm{e}^{3\arg(z)\mathrm{i}}$$

Es folgt $|z| = 3$ und $\arg(z) = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die drei komplexen Zahlen, welche das erfüllen, sind

$$\begin{aligned} z_1 &= 3\mathrm{i} \\ z_2 &= 3(\cos(\frac{7}{6}\pi) + \sin(\frac{7}{6}\pi)\mathrm{i}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i} \\ z_3 &= 3(\cos(\frac{11}{6}\pi) + \sin(\frac{11}{6}\pi)\mathrm{i}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

b)

Siehe nächstes Blatt!

3. Wir lösen zunächst die homogene Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{x}_h(t) - \frac{1}{t}x_h(t) &= 0\\ \Rightarrow \frac{\dot{x}_h(t)}{x_h(t)} &= \frac{1}{t}\\ \Rightarrow \ln(x_h(t)) = \int \frac{\dot{x}_h(t)}{x_h(t)}\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(t) + c\end{aligned}$$

Es folgt $x_h(t) = Ct$. Für die inhomogene Gleichung wenden wir Variation der Konstanten an, also $x(t) := C(t)t$. Es folgt

$$t\cos^2(t) = t\dot{C}(t)$$

also

$$C(t) = \int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right) + C$$

Die Anfangsbedingung ergibt desweiteren

$$0 = x(\pi) = \pi\left(\frac{1}{2}\pi + C\right)$$

woraus $C = -\frac{\pi}{2}$ und die Lösung des Anfangswertproblems folgt:

$$x(t) = \frac{1}{2}t\left(t - \pi + \sin(t)\cos(t)\right)$$

Bitte wenden!

4. **a)** $x(t)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da dies für sin und exp gilt.

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) - \dot{x}(t)\cos(t) + x(t)\sin(t) &= \left(\cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\right)^{\cdot} - \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\cos(t) + \mathrm{e}^{\sin(t)}\sin(t) \\ &= -\sin(t)\mathrm{e}^{\sin(t)} + \cos^2(t)\mathrm{e}^{\sin(t)} - \cos^2(t)\mathrm{e}^{\sin(t)} + \sin(t)\mathrm{e}^{\sin(t)} \\ &= 0\end{aligned}$$

b) Wir setzen $x_p(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$ in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned}2(\sin(t) - 1) &= \ddot{x}_p(t) + \dot{x}_p(t)\cos(t) + x_p(t)\sin(t) \\ &= -a\sin(t) - b\cos(t) + (a\cos(t) - b\sin(t))\cos(t) + (a\sin(t) + b\cos(t))\sin(t) \\ &= -a\sin(t) - b\cos(t) + a(\sin^2(t) + \cos^2(t)) \\ &= -a(\sin(t) - 1) - b\cos(t)\end{aligned}$$

Es folgt $a = -2$ und $b = 0$. Also ist eine partikuläre Lösung

$$x_p(t) = -2\sin(t)$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** $\mathcal{F}$ ist eine Niveaufläche der Funktion $f(x,y,z) := 3x^2 + 2y^2 + z^2$ (ein Ellipsoid). Ein Vektorfeld, das überall senkrecht auf $\mathcal{F}$ steht, ist demzufolge

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass die Tangentialebene in genau denjenigen Punkte parallel zur erwähnten Ebene ist, wo $\nabla f(x,y,z)$ parallel zum Normalenvektor der Ebene ist, also

$$\begin{pmatrix} 6x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir suchen also die Schnittpunkte der Geraden

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

mit dem Ellipsoid. Wir setzen dazu die Parametrisierung der Geraden in die Gleichung für $\mathcal{F}$ ein:

$$36 = 3(\frac{\lambda}{2})^2 + 2(\frac{\lambda}{2})^2 + \lambda^2 = \frac{9}{4}\lambda^2$$

Es folgt $\lambda = \pm 4$ und die gesuchten Punkte sind

$$(2,2,4) \quad \text{und} \quad (-2,-2,-4)$$

b) Für $g(x,y) = z \geq 0$ haben wir die Gleichung $36 = f(x,y,g(x,y)) := 3x^2 + 2y^2 + g(x,y)^2$ Es folgt

$$g(x,y) = \sqrt{36 - 3x^2 - 2y^2}$$

Im Punkt $(1,2)$ ist die Richtungsableitung von $g(x,y)$ minimal in Richtung

$$-\nabla g(1,2) = -\frac{1}{\sqrt{36 - 3x^2 - 2y^2}} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

und ihr Wert ist

$$-|\nabla g(1,2)| = -\left| \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \right| = 1$$

Bitte wenden!

6. Bei der Transformation auf Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(u,v,w) = \begin{pmatrix} u\cos(v)\cos(w) \\ u\sin(v)\cos(w) \\ u\sin(w) \end{pmatrix}$$

transformiert das Volumenelement gemäss

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= |\mathrm{d}\varphi(u,v,w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \left| \begin{pmatrix} \cos(v)\cos(w) & -u\sin(v)\cos(w) & -u\cos(v)\sin(w) \\ \sin(v)\cos(w) & u\cos(v)\cos(w) & -u\sin(v)\sin(w) \\ \sin(w) & 0 & u\cos(w) \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= u^2\cos(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \end{aligned}$$

was der Integrand auf der rechten Seite von (*) ist. Demzufolge ist $f(x,y,z) \equiv 1$ und das Integral berechnet das Volumen von $\mathcal{G}$ und zwar

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\mathcal{G}) &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} u^2\cos(w)\mathrm{d}w \right) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{2\pi}{3}(\sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(-\frac{\pi}{4})) \\ &= \frac{2\pi}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &= \frac{\pi}{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$\mathcal{G}$ ist ein Rotationskörper. Er entsteht durch Rotation des Kreissektors, welcher begrenzt wird durch den Einheitskreis in der (xz)-Ebene und die Geraden $t \mapsto (t\cos(a), 0, t\sin(a)), (t\cos(b), 0, t\sin(b))$, um die z-Achse. Für $(a,b) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ entspricht dies dem Körper, der entsteht, wenn aus der Einheitskugel am Nord- bzw. Südpol jeweils ein Kegel mit Öffnungswinkel $\frac{\pi}{6}$ resp. $\frac{\pi}{4}$ entfernt wird.

Siehe nächstes Blatt!

7. Wir berechnen den Fluss von innen nach aussen mit dem Satz von Gauss und verwenden Kugelkoordinaten

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial K} F(x,y,z)\cdot n \mathrm{d}\sigma &= \iiint\limits_{K} \operatorname{div} F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint\limits_{K} 2 + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\iiint\limits_{K} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{K} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + \iiint\limits_{K} (u\sin(w))^2 u^2\cos(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + \int_{u=0}^{2}\int_{v=0}^{2\pi}\int_{w=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u^4\sin^2(w)\cos(w)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + 2\pi\frac{2^5}{5}\int_{w=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(w)\cos(w)\mathrm{d}w \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + 2\pi\frac{32}{5}\int_{w=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2w))\cos(w)\mathrm{d}w \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + 2\pi\frac{32}{5}\int_{w=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos(w)-\cos(2w)\cos(w))\mathrm{d}w \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + 2\pi\frac{32}{5}\int_{w=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos(w)-\frac{1}{2}(\cos(3w)+\cos(w)))\mathrm{d}w \\
&= 2\mathrm{Vol}(K) + 2\pi\frac{32}{5}\int_{w=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos(w)-\cos(3w))\mathrm{d}w \\
&= \frac{448}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

8. **a)** Wir verwenden Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z). Das Flächenstück S ist bestimmt durch $\varrho \leq 1$ und $z = f(x(\varrho,\varphi,z), y(\varrho,\varphi,z)) = f(\varrho\cos(\varphi), \varrho\sin(\varphi)) = \varrho^2 \sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\varrho^2 \sin(2\varphi)$. Somit ist eine Parametrisierung von S gegeben durch:

$$\begin{aligned} h \ : \ [0,1] \times [0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ (\varrho, \varphi) &\mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho\sin(\varphi) \\ \frac{1}{2}\varrho^2 \sin(2\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Auf ∂S gilt zusätzlich $\varrho = 1$, also ist eine Parametrisierung gegeben durch:

$$\begin{aligned} \hbar \ : \ [0,2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Wir suchen zunächst nach Extrema im Inneren von E. An diesen Stellen muss gelten

$$0 = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

Die Determinante der Hesseschen Matrix (an diesem Punkt) ist

$$\det\left(\mathrm{d}\nabla f(0,0)\right) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = -1 < 0$$

Demzufolge handelt es sich um einen Sattelpunkt und somit kein Extremum.

Somit befinden sich die globalen Extrema am Rand. Um diese zu finden, bemerken wir, dass es sich dabei um die Punkte auf der Kurve ∂S mit maximaler bzw. minimaler z-Koordinate handelt. Unter Verwendung der Parametrisierung aus **a)** suchen wir also nach den Extremalstellen von

$$z(\varphi) := \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$$

Das ist ein eindimensionales Extremalwertproblem mit Maxima $\varphi_{1,3} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ und Minima $\varphi_{2,4} = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Somit hat f die globalen Maxima:

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$$

und die globalen Minima:

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) i) Die Arbeit beträgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} F(\hbar(\varphi)) \cdot \dot{\hbar}(\varphi)\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ \frac{1}{2}\sin(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) - 1\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin(4\varphi) - 1\mathrm{d}\varphi \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

ii) Die zu i) kompatible Orientierung von S ist durch das Normalenvektorfeld

$$n(\varrho,\varphi) = h_\varrho(\varrho,\varphi) \times h_\varphi(\varrho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \varrho\sin(2\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho\sin(\varphi) \\ \varrho\cos(\varphi) \\ \varrho^2\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} -\varrho\sin(\varphi) \\ -\varrho\cos(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Rotation von F beträgt

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Satz von Stokes berechnet sich die Arbeit nun zu

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} F(\hbar(\varphi)) \cdot \dot{\hbar}(\varphi)\mathrm{d}\varphi &= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \operatorname{rot} F(h(\varrho,\varphi)) \cdot n(\varrho,\varphi)\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \varrho \begin{pmatrix} -\varrho\sin(\varphi) \\ -\varrho\cos(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi \\
&= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} -2\varrho\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$