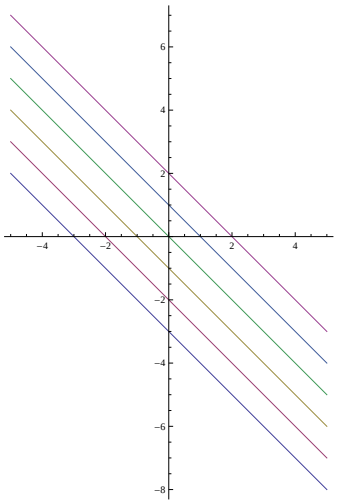
# Lösungen zur Serie 3

**1.** Die Niveaulinien erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = c,$$

sind also parallele Geraden in der $xy$-Ebene.




**2.** **i)** Den gesuchten Definitionsbereich kann man bestimmen, in dem man **alle** Fälle betrachtet für die $a^b$ existiert.

Offensichtlich, wenn $a > 0$ (und $b$ beliebig) ist, kann man $a^b := e^{b \log a}$ setzten.

Wenn $a < 0$ ist, kann man nur $b = n \in \mathbb{Z}$ oder $b = p/q \in \mathbb{Q}$ (mit $p$ und $q$ teilerfremd) wählen um eine sinnvolle Definition zu erhalten.

Im ersten Fall ist $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}$ für $n \geq 0$ oder $a^n := \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ mal}}}$ für $n < 0$.

Im zweiten Fall setzt man $a^{p/q} := (\sqrt[q]{a})^p$, was wohldefiniert ist, sobald $q$ ungerade ist.

$0^0$ ist ein Spezialfall, für den es keine endgültige Argumentation gibt.

Die Konvention $0^0 = 1$ ist also aus praktischen Gründen sinnvoll, weil sie die Formulierung vieler mathematischer Ausdrücke vereinfacht. $0^0 = 1$ per Definition bedeutet aber keineswegs, dass die Funktion $a^b$ an der Stelle $a = b = 0$ stetig wäre.[1]

[1](vgl. `http://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_(Mathematik)`)

**Bitte wenden!**

Der Definitionsbereich der gegebenen Funktion ist dann $D = A \cup B \cup C$, mit

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sin x > 0, y \in \mathbb{R}\right\} \\
B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sin x < 0, y = \frac{p}{2\,n+1},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\} \\
C &= \{0\} \times \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

**ii)** Die lineare Approximation kann mit Hilfe der Taylorentwicklung bestimmt werden

$$\begin{aligned}
f(x,y) &\simeq f\left(\frac{\pi}{6}, 2\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{6}, 2\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{6}, 2\right) \cdot (y-2) = \\
&= \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + 2\,\cos\frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2-1}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \log\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 (y-2) = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \log\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(y-2)
\end{aligned}$$

Insbesondere ist, wenn wir $x = 31^\circ = \dfrac{31\,\pi}{180}$ und $y = 1.98$ einsetzen,

$$(\sin 31^\circ)^{1.98} = f\left(\frac{31\,\pi}{180}, 1.98\right) \simeq \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} + \log 2 \cdot \frac{0.02}{4} \simeq 0,26858$$

**iii)** In aller Punkten, in welchen die partiellen Ableitungen existieren, stimmen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ überein

$$\begin{aligned}
f_x = y\,\cos x\,(\sin x)^{y-1} \quad \Rightarrow \quad f_{xy} &= \cos x\,(\sin x)^{y-1} + y\,\cos x\,\log\sin x\,(\sin x)^{y-1} = \\
&= \cos x(\sin x)^{y-1}(1 + y\,\log\sin x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y = \log\sin x\,(\sin x)^y \quad \Rightarrow \quad f_{yx} &= \frac{\cos x}{\sin x}\,(\sin x)^y + y\,\log\sin x\,\cos x\,(\sin x)^{y-1} = \\
&= \cos x(\sin x)^{y-1}(1 + y\,\log\sin x)
\end{aligned}$$

**3.** **a)** Die Niveaulinien kann man wie folgt analytisch beschreiben

$$L_N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \pm\sqrt{N\,e^{\,x^2/3} - x^2}\right\}\ ,$$

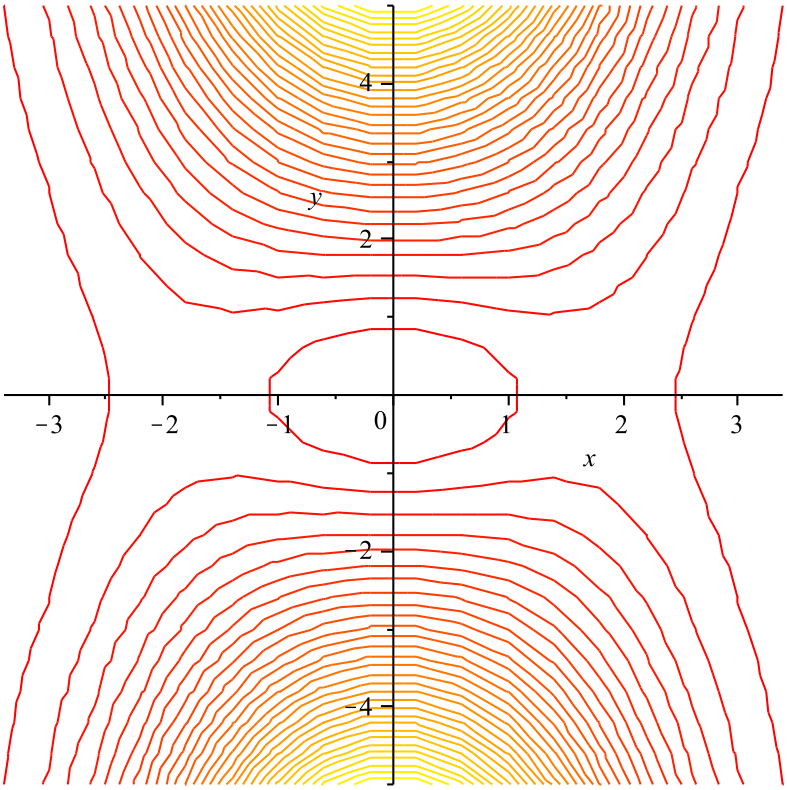
wobei $N$ das Niveau ist.

Eine zweite Möglichkeit wäre die Taylorentiwicklung der Exponentialfunktion zu betrachten:

$$x^2 + y^2 = N\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + \cdots\right)$$

Der genaue Plot ist:

**Siehe nächstes Blatt!**



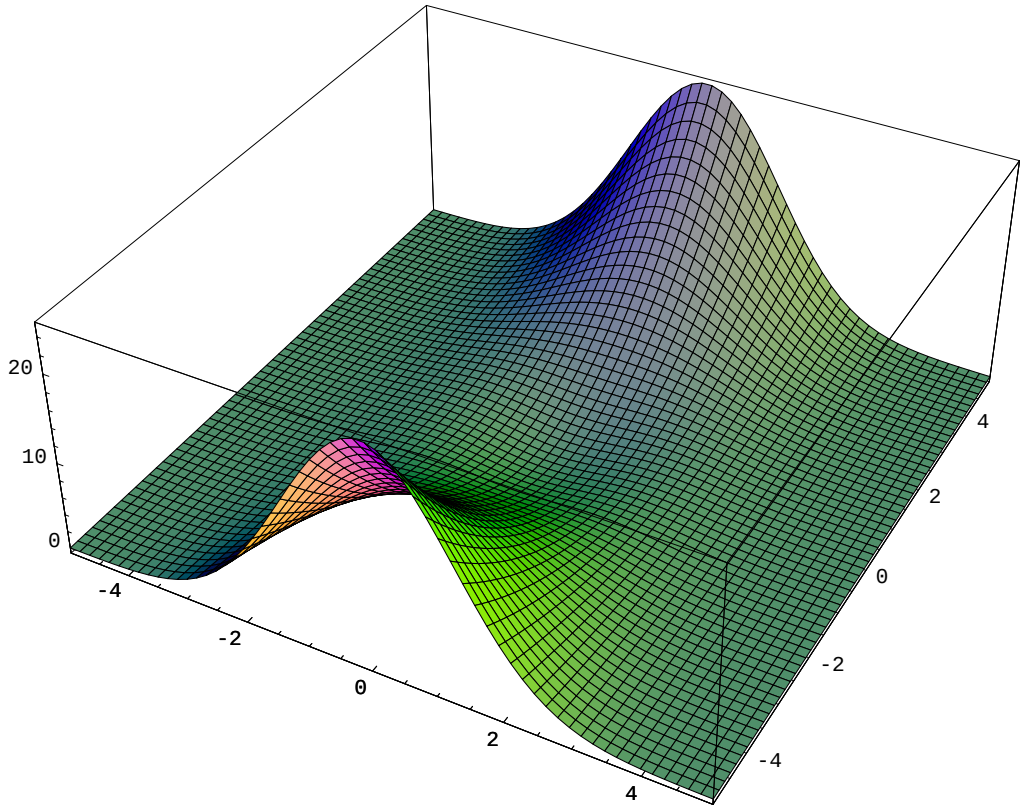

**b)** Aus der Figur kann man schliessen, dass für kleine $x$ und $y$ sieht der Graph von $f$ ungefähr wie ein (elliptisches) Paraboloid aus.

Für grössere $x$ fällt die Exponentialfunktion seht schnell ab, somit ist der Graph im Bereich $\{|x|\gamma 1, y < x\}$ fast flach.

In einer Umgebung der $y-$Achse stehen mehrere Niveaulinien senkrecht zur Achse, d.h. die Funktion steigt schnell in der $y$-Richtung.

Der genaue $3D-$Plot ist:

**Bitte wenden!**


20
10
0
-4
-2
0
2
4
4
2
0
-2
-4