Lösungen zur Serie 4

1. **a)** Die gegebene Funktion ist wohldefiniert, sobald das Argument des Logarithmus poistiv ist und der Nenner nicht verschwindet. Der Definitionsbereich von f ist dann

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\,y > 0\right\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \,.$$

Der Gradient lautet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - \frac{1}{x} \\ 2\,x\,y + \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

und somit, wenn wir $w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1)^T$ setzen,

$$\begin{aligned} D_{w_1} f(-1,-4) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\nabla f(-1,-4)\cdot(1,1)^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} (-4)^2 - \frac{1}{-1} \\ 2\,(-1)\,(-4) + \frac{1}{-4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{17 + \frac{31}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{99\sqrt{2}}{8} \simeq 17,5009\,. \end{aligned}$$

b) Die zu betrachtende Richtungsableitung lautet

$$\begin{aligned} R(x) :&= D_{w_1} f(x,4x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\nabla f(x,4x)\cdot(1,1)^T = \begin{pmatrix} (4\,x)^2 - \frac{1}{x} \\ 2\,x\,(4\,x) + \frac{1}{4\,x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(16\,x^2 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(8\,x^2 + \frac{1}{4\,x}\right) = 12\sqrt{2}\,x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8\,x}\,. \end{aligned}$$

Sie ist extremal wenn

$$R'(x) = 3\sqrt{2}\frac{64\,x^3 + 1}{8\,x^2} = 0$$

ist, d.h. wenn $x = -\frac{1}{4}$ ist. Da $R(x)$ nach Unendlich strebt, wenn x gegen 0 sowie gegen Unendlich geht, ist $x = -\frac{1}{4}$ wirklich eine Minimalstelle. Alternativ sieht man das aus

$$\begin{aligned} R''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(48 - \frac{3}{2x^2}\right) \\ R''(-\frac{1}{4}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(48 - \frac{3}{2(-\frac{1}{4})^3}\right) = 72\sqrt{2} > 0. \end{aligned}$$

Und es gilt

$$R\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{4} \simeq 3,18198\,.$$

Bitte wenden!

2. Sei $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ und $v_2 = (2,1)^T$.

Die zugehörige normierte Richtungsvektoren lauten dann $w_1 = \dfrac{v_1}{|v_1|} = v_1$ und $w_2 = \dfrac{v_2}{|v_2|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\, v_2$

a) Aus

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ -x + 4\,y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(2,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die gesuchte Richtungsableitungen lauten

$$D_{w_1} = \nabla f(2,1) \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

und

$$D_{w_2} = \nabla f(2,1) \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

b)

$$D_{v_0} f(2,1) = |\nabla f(2,1)| = \left| \begin{pmatrix} 2^2 - 1 \\ -2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \simeq 3,60555$$

c) Eine notwendige Bedingung dafür wäre $\nabla f = 0$. Der Punkt A kann keine Extremalstelle sein.

d) Aus die geometrische Bedeutung des Gradient folgt, dass ∇f zu jeder Niveaulinie senkrecht steht.

Die (Tangente zur) Niveaulinie im Punkt A ist dann parallel zu einem (Richtungs-)Vektor $v = (x,y)^T$, der folgende Bedingungen erfüllen sollte

$$\begin{cases} v \cdot (3,2)^T = 3\,x + 2\,y = 0 \\ |v|^2 = x^2 + y^2 = 1 \end{cases} .$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist (bis auf einem Vorzeichen) eindeutig betimmt: $v = (-2,3)^T$.

3. **a)** $|f(u,v)|^2 = \cos^2(u)\cos^2(v) + \cos^2(v)\sin^2(u) + \sin^2(v)$

$$= \underbrace{(\cos^2(u) + \sin^2(u))}_{1} \cos^2(v) + \sin^2(v)$$

$$= \cos^2(v) + \sin^2(v) = 1.$$

b) Die Koordinatenlinien $v = v_0 : u \mapsto f(u, v_0)$ sind Kreise parallel zur $x-y$-Ebene mit Mittelpunkt $(0,0,\sin(v_0))$ und Radius $\cos(v_0)$. Somit ist K rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse.

c) Die Koordinatenlinie $u = 0 : v \mapsto f(0,v)$ ist der Halbkreis in der $x-z$-Ebene wo $x \geq 0$ um den Ursprung mit Radius 1.

d) K ist die Einheitssphäre. u ist der Längengrad, v der Breitengrad - jeweils im Bogenmass.