Lösungen zur Serie 5

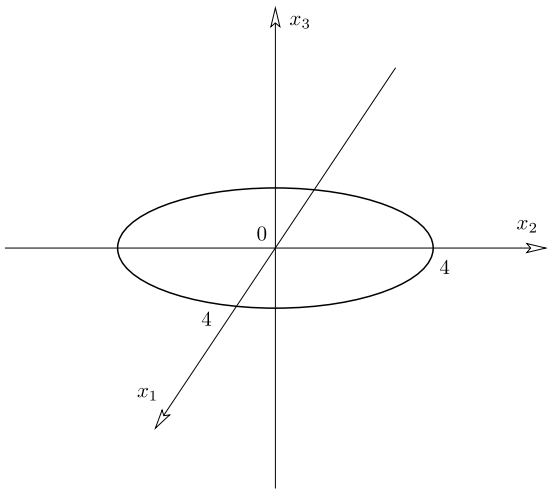
1. Gegeben ist

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & x(u,v) \end{array}$$

mit

$$x(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos(u)(3+\cos(v)) \\ \sin(u)(3+\cos(v)) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

a)

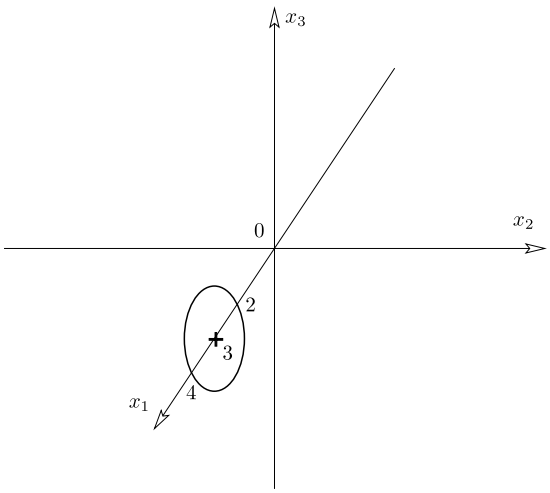


Setzen wir zunächst $v = 0$.

$$(u,0) \mapsto x(u,0) = \begin{pmatrix} 4\,\cos(u) \\ 4\,\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die induzierte Kurve ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und Radius 4 in der $(x_1, x_2)-$Ebene.

Bitte wenden!

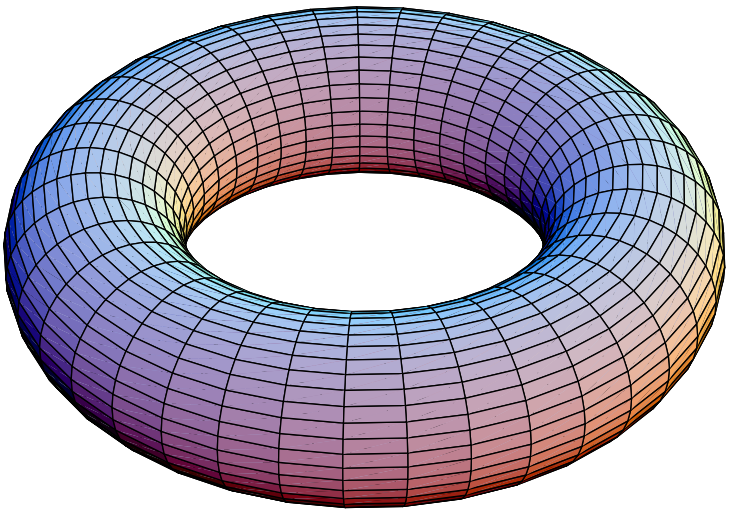


Für $u = 0$ kriegen wir

$$(0, v) \mapsto x(0, v) = \begin{pmatrix} 3 + \cos(v) \\ 0 \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

Dieise Kurve ist wieder ein Kreis, aber mit Mittelpunkt $(3, 0, 0)$ und Radius 1, der in der $(x_1, x_3)-$Ebene liegt.

Analoge Überlegungen für $v = -\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$ und $u = \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$ liefern weitere Kreise, sodass alle Kurven zusammen einen *Torus* bilden.



b) Gesucht ist eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass

$$g(x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) = 1\,.$$

Mit Hilfe des gegebenen Hinweis können wir die Fuktion $x(u, v)$ umformen, bis wir

Siehe nächstes Blatt!

die obige Identität erreichen. Zunächst betrachten wir

$$\begin{aligned} x_1(u,v)^2 + x_2(u,v)^2 &= \cos^2 u(3+\cos v)^2 + \sin^2 u(3+\cos v)^2 = \\ &= (\cos^2 u + \sin^2 u)(3+\cos v)^2 = (3+\cos v)^2 \,. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\sqrt{x_1(u,v)^2 + x_2(u,v)^2} = 3 + \cos v$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{x_1(u,v)^2 + x_2(u,v)^2} - 3\right)^2 = \cos^2 v = 1 - \sin^2 v$$

und mit $x_3(u,v) = \sin v$

$$\left(\sqrt{x_1(u,v)^2 + x_2(u,v)^2} - 3\right)^2 = 1 - x_3(u,v)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{x_1(u,v)^2 + x_2(u,v)^2} - 3\right)^2 + x_3(u,v)^2 = 1$$

Da die letzte Identität für alle u und v (im Definitionsbereich) gilt, können wir die drei Funktionen x_1,x_2 und x_3 durch drei beliebige Variablen ersetzen.

Die gesuchte Funktion lautet dann

$$g(x,y,z) := \left(\sqrt{x^2+y^2} - 3\right)^2 + z^2 \,.$$

2. Aufgrund einfacher geometrischer Überlegungen müssen die Punkte folgende Gleichung erfüllen:

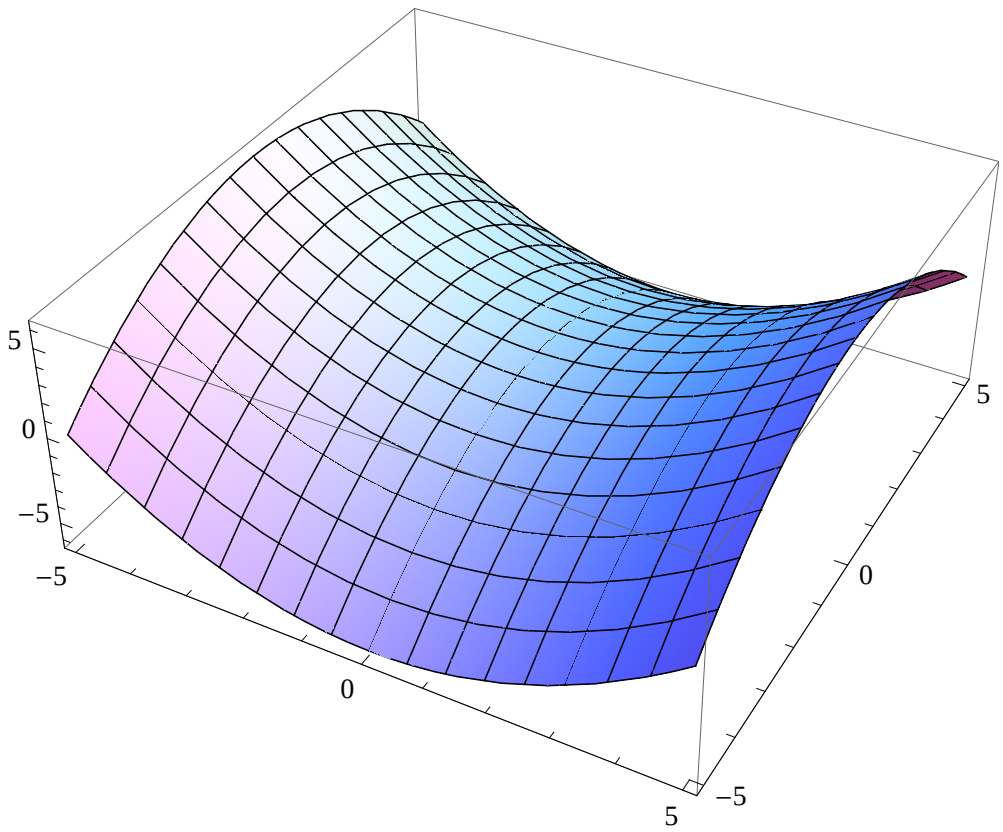
$$y^2 + (z+1)^2 = x^2 + (z-1)^2$$

Formt man das um, so ist ersichtlich, dass es sich um ein hyperbolisches Paraboloid im euklidischen Raum handelt:

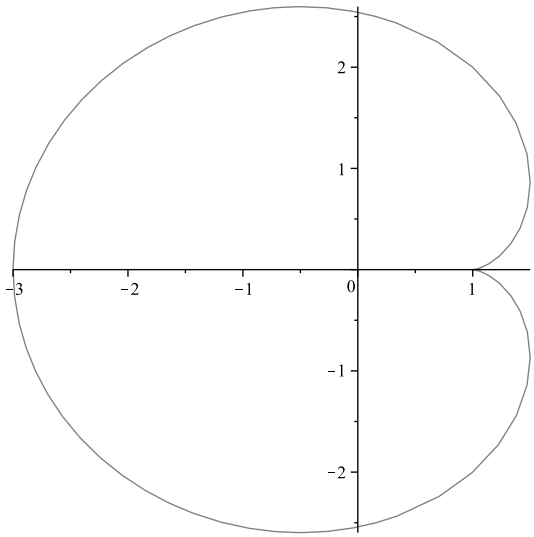
$$z = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$$

Der $3D-$Plot ist:

Bitte wenden!



3. a) Die erste Kurve ist eine Kardioide (Herzkurve).



i) Wenn man t durch $-t$ erstezt, kriegt man $x(-t) = x(t)$ und $y(-t) = -y(t)$: die Kurve ist also zur $x-$Achse symmetrisch.

ii)/iii) Die gemeinsamen Punkte der Kurve mit der $x-/y-$Achse bestimmt man in dem man die Gleichungen $x(t) = 0$ und $y(t) = 0$ mit Hilfe der gegebenen trigonometrischen Identitäten löst.

$$x(t) = 2\,\cos t - \cos 2t = -2\,\cos^2 t + 2\,\cos t + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos t = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

Wegen der Periodizität der Cosinusfunktion, hat die obige Gleichung 2 Lösungen $t = \pm \arccos \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ und somit hat die Kurve zwei gemeinsame Punkte mit der $y-$Achse: $\Big(0, \pm \sqrt{3+2\sqrt{3}}\Big)$.[1]

In änlicher Weise

$$y(t) = 2\sin t - \sin 2t = 2\sin t(1-\cos t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin t = 0 \vee \cos t = 1$$

und die gemeinsame Punkte mit der $x-$Achse sind $\big(1,0\big)$ und $\big(-3,0\big)$.

iv)/v) Die Punkte mit horizontaler Tangente müssen die folgende Gleicung erfüllen

$$y'(t) = 2\,\cos t - 2\,\cos 2t = 2\,\cos t - 4\,\cos^2 t + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos t = 1 \vee \cos t = -\frac{1}{2}$$

Wenn wir das in der Parameterdarstellung der Kurve zurücksetzen, kriegen wir

$$(1,0)\,, \quad \Big(-\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\Big) \text{ und } \Big(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big)\,.$$

Die änliche Gleichung für die Punkte mit vertikalen Tangente

$$x'(t) = -2\,\sin t + 2\,\sin 2t = 2\,\sin t(-1+2\,\cos t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin t = 0 \vee \cos t = \frac{1}{2}$$

liefert

$$(-3,0)\,, \quad \Big(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \text{ und } \Big(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\,.$$

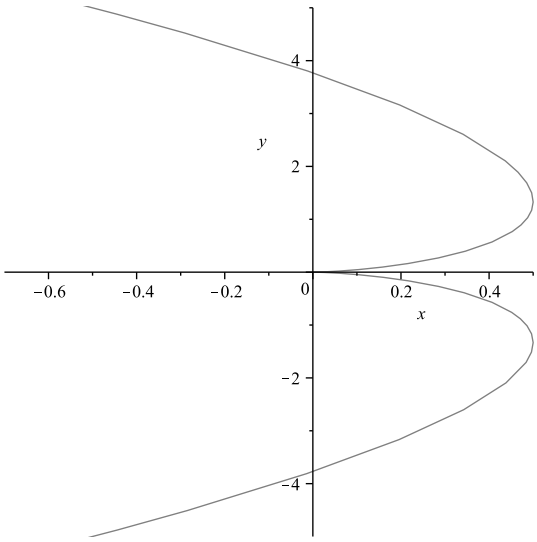
vi) Bei dieser Funktion ist die Steigung für alle (x,y) wohldefiniert.

b) Die zweite Kurve kann man als Graph einer Funktion $x = x(y)$ deuten.

[1] Hier haben wir die folgende Formel verwendet:

$$\sin\big(\arccos q\big) = \sqrt{1-q^2}$$

Bitte wenden!



i) Wenn man t durch $-t$ erstezt, kriegt man wieder $x(-t) = x(t)$ und $y(-t) = -y(t)$: die Kurve ist also zur $x-$Achse symmetrisch.

ii)/iii) Die gemeinsamen Punkte der Kurve mit der $x-/y-$Achse bestimmt man durch die Gleichungen

$$x(t) = t^2 - \frac{t^4}{2} = t^2(1 - \frac{t^2}{2}) = 0$$
$$y(t) = \frac{4}{3}\,t^3 = 0$$

Daraus erhält man $t = 0, \pm\sqrt{2}$ und somit $(0,0)$ und $\left(0, \pm\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$ auf die $y-$ Achse.

Analog dazu liefert $t = 0$ nochmals $(0,0)$ als Lösung.

iv)/v) An der Stelle $t = 0$ verschwinden beide Ableitungen $x'(t) = 2\,t - 2\,t^3$ und $y'(t) = 4\,t^2$. Das erste Polynom hat zusätzliche zwei symmetrische Nullstelle für $t = \pm 1$ und somit zwei Punkte $\left(\frac{1}{2}\,, \pm\frac{4}{3}\right)$ mit vertikalen Tangente.

vi) In diesem Fall ist die Steigung der Tangente für $t = 0$ unbestimmt. In diesem Ausnahmepunkt berechnen wir die Steigung als Grenzwert:

$$\frac{dy}{dx}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{4\,t^2}{2\,t - 2\,t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{4\,t^2}{2\,t} = 0$$

Die Kurve hat also auch im Ursprung eine horizontale Tangente.

c) Die dritte Kurve ist eine Lissajous-Figur

i) Auch in diesem Fall besitzt die Kurve eine Spiegelsymmetrie, die man wie folgt verifizieren kann:

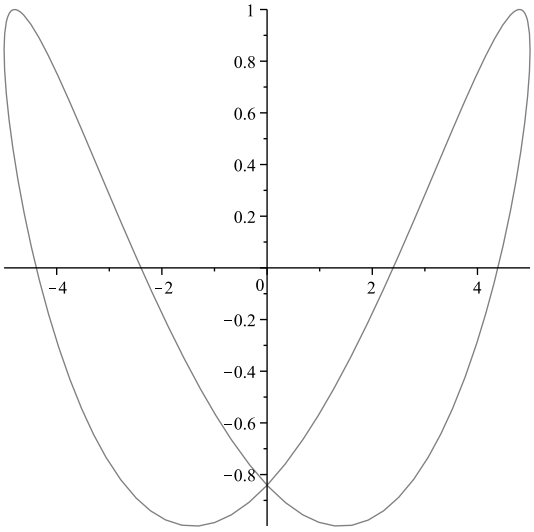
$$x(t+\pi) = \sin(t+\pi) = -\sin t = -x(t)$$
$$y(t+\pi) = \sin(2\,(t+\pi) - 1) = \sin(2\,t - 1 + 2\,\pi) = \sin(2\,t - 1) = y(t)$$

Die Kurve ist also zur $y-$Achse Symmetrisch.

Siehe nächstes Blatt!

ii)/iii) Gemeinsamen Punkte der Kurve mit der $x-/y-$Achse:

$$x(t) = 5\,\sin t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0, \pi, 2\,\pi$$
$$\Rightarrow (0, -\sin 1) \simeq (0, -0.841)$$
$$y(t) = \sin(2\,t - 1) = 0$$
$$\Rightarrow t = \frac{1 + k\pi}{2} \quad k = 0, 1, 2, 3$$
$$\Rightarrow \left(\pm 5 \sin \frac{1}{2}, 0\right) \simeq (\pm\, 2.397, 0)\,,$$
$$\left(\pm 5 \sin \frac{1+\pi}{2}, 0\right) \simeq (\pm\, 4.387, 0)$$



iv) Punkte mit horizontaler Tangente:

$$y'(t) = 2\,\cos(2\,t - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{k\,\pi + 2}{4} \quad k = 1, 3, 5, 7 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\pm 5\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\,,\,1\right) \simeq (\pm\, 4.798, 1)\,,\; \left(\pm 5\,\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\,,\,-1\right) \simeq (1.408, -1)$$

v) Punkte mit vertikaler Tangente:

$$x'(t) = 5\,\cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}\,,\,3\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad (\pm\, 5, \sin 1) \simeq (\pm\, 5, 0.841)$$

vi) —