Lösungen zur Serie 6

1. **a)** Wir betrachten die folgenden zwei Kurven, die durch den Punkt $\Big(0, 0, f(0,0)\Big)$ gehen:

$$g(x) := f(x,0) = e^{-(x^2-2\,x+2)}$$

$$h(y) := f(0,y) = e^{-(y^2+3\,y+2)}$$

Aus die Ableitungen

$$g'(x) = e^{-(x^2-2\,x+2)}\,(2-2\,x) \qquad \Rightarrow \quad g'(0) = 2e^{-2}$$

$$h'(y) = e^{-(y^2+3\,y+2)}\,(-3-2\,y) \quad \Rightarrow \quad h'(0) = -3e^{-2}$$

folgt, dass die Vektoren

$$v_g = (1, 0, 2\,e^{-2})^T \quad \text{und} \quad v_h = (0, 1, -3\,e^{-2})^T$$

die gesuchte Ebene E an das Bild von f im Punkt $(0,0)$ aufspannen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2\,e^{-2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3\,e^{-2} \end{pmatrix} .$$

Die Koordinatengleichung (implizite Darstellung) kann man aus der Gleichung $\langle v_g \times v_h, (x,y,z)^T\rangle = f(0,0)$ herleiten:
aus $v_g \times v_h = (-2\,e^{-2}, 3\,e^{-2}, 1)^T$ folgt

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big| z = 2\,e^{-2}\,x - 3\,e^{-2}\,y + e^{-2}\Big\} .$$

Das gleiche Resultat bekommt man kriegen durch Elimination der Parameter λ und μ.

In der linearen Approximation gilt

$$f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y)^T\rangle ,$$

Bitte wenden!

und da $\nabla f(x,y) = e^{-(x^2+y^2-2\,x+3\,y+2)}\,(-2\,x+2, -2\,y-3)^T$ ist, lautet die obige Formel

$$f(x,y) = e^{-2} + e^{-2}\,(2\,x - 3\,y)\,.$$

Die lineare Approximation von f entspricht also der Koordinatengleichung der Tangentialebene von f.

b) Die Niveaulinie durch $O(0,0)$ ist definiert als

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = f(O) = e^{-2}\right\}\,,$$

d.h.

$$x^2 + y^2 - 2\,x + 3\,y = 0\,.$$

Wenn wir obigen Ausdruck in $(x-1)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$ umformulieren, erkennen wir einen Kreis um $M(1, -\frac{3}{2})$ mit Radius $R = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Andererseits ist der Gradient im Punkt $(0,0)$

$$\nabla f(0,0) = e^{-2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

parallel zu $(1, -\frac{3}{2})^T$ und somit steht er senkrecht auf der Niveaulinie ($\nabla f \parallel R$).

c) Die Tangentialebene ist parallel zur $(x,y)-$Ebene, falls

$$\begin{cases} g'(x) = 0 \\ h'(y) = 0 \end{cases} \quad \overset{a)}{\Leftrightarrow} \quad (x,y) = (1, -\frac{3}{2})$$

Die Niveaulinie durch $(1, -\frac{3}{2})$ lautet

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = f(1, -\frac{3}{2}) = e^{5/4}\right\}\,.$$

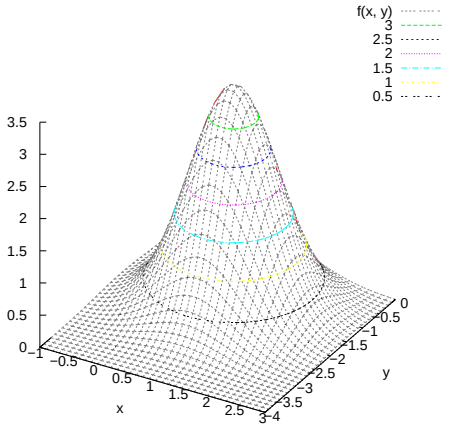
Der Punkt $(1, -\frac{3}{2})$ ist ein Maximum, da aus

$$f(x,y) = e^{-d}\,, \text{ mit } d = (x-1)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

folgt, dass $d = -\frac{5}{4}$ minimal ist und f somit bei $(1, -\frac{3}{2})$ maximal wird.

d) Aus der vorherigen Argumentation folgt, dass jede Niveaulinie einem Kreis entspricht.

Siehe nächstes Blatt!



2. **a)** Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}^2$:
Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist $x^2 + y^2 \neq 0$ und somit $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$. Für $(x, y) = (0, 0)$ ist $f(x, y)$ nicht definiert. Also ist $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Wertebereich $W(f) \subseteq \mathbb{R}$:
Es ist $f(x, 0) = 0$ für alle $x \neq 0$, und für ein festes $a \neq 0$ haben wir $f\left(0, \frac{1}{a}\right) = a$. Also ist $W(f) = \mathbb{R}$.

b) Zur Bestimmung der Niveaulinien muss die Gleichung $\frac{y}{x^2+y^2} = c$ für festes $c \in \mathbb{R}$ gelöst werden.

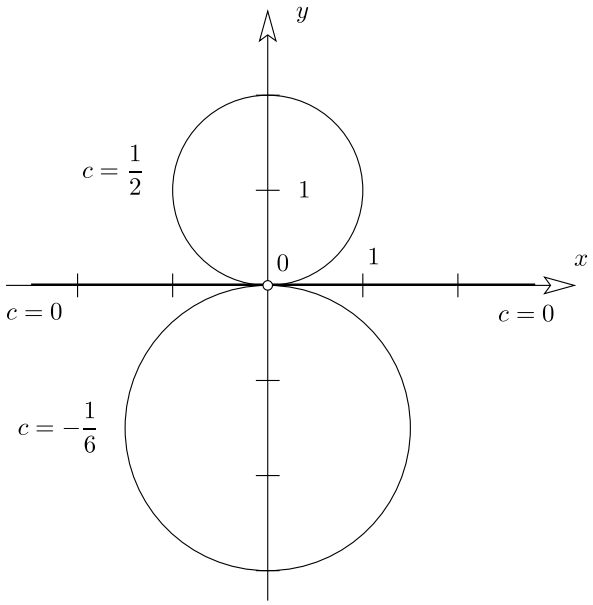
Im Fall $c = 0$ ist die Niveaulinie die x-Achse ohne den Punkt $(0, 0)$, d. h. $\{(x, 0) | x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.

Im Fall $c \neq 0$ schreiben wir $x^2 + y^2 - \frac{y}{c} = 0$, ergänzen quadratisch und erhalten

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2} \quad , \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Dies ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\left(0, \frac{1}{2c}\right)$ und Radius $r = \frac{1}{2|c|}$ ohne den Punkt $(0, 0)$.

Bitte wenden!



c) Die Gleichung der Tangentialebene des Graphen von f über dem Punkt (x_0, y_0) lautet

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Tangentialebene hat also die Gleichung

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,(x - 1) \quad \text{oder} \quad x + 2\,z = 2\,.$$

d) Die Richtunsableitung $D_v f$ ist per Konstruktion maximal, wenn $v \parallel \nabla f$ ist, d.h. in Richtung von

$$v = \frac{\nabla f(1, 1)}{|\nabla f(1, 1)|} = \frac{1}{1/2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Wert ist dann $D_v f(1, 1) = |\nabla f(1, 1)| = \frac{1}{2}$.

3. Die drei Funktionen ergeben drei verschiedene Darstellungen der gleichen Fläche (wenn eingeschränkt auf den oberen Halbraum).

Siehe nächstes Blatt!

a) Wir bestimmen zunächst die Definitions- und Wertebereiche jeder Funktion.

$$D_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 25 \right\}$$

und

$$W_f = \left\{ z \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, z \leq 5 \right\} = [0,5]\,.$$

Der Definitionsbereich ist eine $2-$dimensionale Kreisscheibe mit Radius 5 um $(0,0)$ und der Wertebereich ist ein (abgeschlossenes) Intervall.

Die zweite Funktion ist für alle ϑ und φ wohldefiniert, d.h. $D_g = \mathbb{R}^2$ (und offensichtlich $\dim \mathbb{R}^2 = 2$).
Der Wertebereich bestimmt man in dem man die gewönliche trigonometrische Identität $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ mehrmals verwendet.

Sei $g(\vartheta,\varphi) = (g_1(\vartheta,\varphi), g_2(\vartheta,\varphi), g_3(\vartheta,\varphi))^T$, dann ist

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 25 \underbrace{\left(\sin^2\vartheta \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \cos^2\vartheta \right)}_{=1} = 25$$

und somit

$$W_g = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 25 \right\}\,.$$

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen, dieselbe Wertebereiche könnte man auch kriegen, wenn man nur $[0,\pi]\times[0,2\,\pi]$ als Definitionsbereich betrachtete.

Auch die dritte Funktion ist überall wohledefiniert: in diesem Fall ist $D_h = \mathbb{R}^3$ (und $\dim \mathbb{R}^3 = 3$).

Diese Funktion kann jeden positiven Wert annehmen, d.h.

$$W_h = \mathbb{R}^+ = [0,\infty)\,.$$

b) Wie schon angedeutet, das Bild von g stimmt mit der Niveaufläche von h zum Niveau 25 überein: jede Niveaufläche von h entspricht eine Sphäre und g parametrisiert die Sphäre mit Radius $r = 5$. Wenn man $z = f(x,y)$ setzt, kann man leicht verifizieren, dass der Graph von f ist die *obere* Halbspäre mit dem gleichen Radius.

Bitte wenden!

c) Die gesuchte Ableitungen lauten

$$df(x,y) = \frac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\,(-x\,,\,-y) \qquad (1\times 2)\text{-Matrix}$$

$$dg(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} 5\,\cos\vartheta\cos\varphi & -5\,\sin\vartheta\sin\varphi \\ 5\,\cos\vartheta\sin\varphi & 5\,\sin\vartheta\cos\varphi \\ -5\,\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \qquad (3\times 2)\text{-Matrix}$$

$$dh(x,y,z) = (2\,x, 2\,y, 2\,z) \qquad (1\times 3)\text{-Matrix}$$

d) Wenn wir h und g zusammensetzen, kriegen wir $h\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} h\circ g(\vartheta,\varphi) &= (5\,\sin\vartheta\cos\varphi)^2 + (5\,\sin\vartheta\sin\varphi)^2 + (5\,\cos\vartheta)^2 = \\ &= 25\,\sin^2\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} + 25\,\cos^2\vartheta = 25 \end{aligned}$$

Somit ist offensichtlich

$$d\big(h\circ g\big)(\vartheta,\varphi) = (0\;0)$$

e) Das gleiche Resultat kriegt man unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} &d\big(h\circ g\big)(\vartheta,\varphi) = dh\big(g(\vartheta,\varphi)\big)\,dg(\vartheta,\varphi) = \\ &= (2g_1(\vartheta,\varphi), 2g_2(\vartheta,\varphi), 2g_3(\vartheta,\varphi)) \begin{pmatrix} 5\,\cos\vartheta\cos\varphi & -5\,\sin\vartheta\sin\varphi \\ 5\,\cos\vartheta\sin\varphi & 5\,\sin\vartheta\cos\varphi \\ -5\,\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= 50\;(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} = (0\;0) \end{aligned}$$

Das könnte man auch ohne zu rechnen erraten: g parametrisiert die Sphäre mit $r=5$, $h$beschreibt Niveauflächen, die Sphären entsprechen: h ist also *per Konstruktion* auf dem Bild von g konstant und somit muss die Ableitung verschwinden.

f) Der zu betrachtende Gradient ist

$$\nabla h(x,y,z) = \big(dh(x,y,z)\big)^T = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $(x,y,z)^T$ ist der Radius der Sphäre durch den Punkt $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Deshalb steht $\nabla h(x,y,z)$ senkrecht auf der durch den Punkt verlaufenden Niveaufläche von h.