Lösungen zur Serie 7

1. **a)** Die gegebene Funktion ist wohldefiniert, sobald das Argument des Logarithmus positiv ist, d.h.

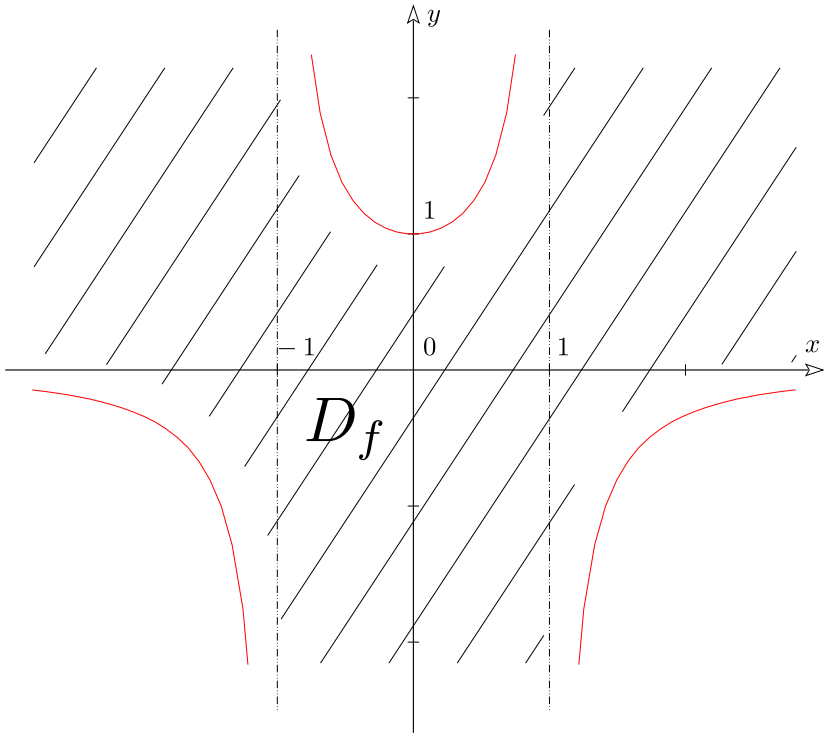
$$D_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x^2-1)\,y > -1 \right\} .$$

Um den Definitionsbereich zu skizzieren ist die folgende Fallunterscheidung nützlich:

i) wenn $|x| < 1$ ist, muss $y < \dfrac{-1}{x^2-1} = \dfrac{1}{1-x^2} (> 0)$ sein;

ii) wenn $|x| > 1$ ist, muss $y > -\dfrac{1}{x^2-1} (< 0)$ sein;

iii) wenn $x = \pm 1$(sowie wenn $y = 0$) ist, ist die Funktion für alle $y \in \mathbb{R}$ (bzw. für alle $x \in \mathbb{R}$) wohldefiniert.



Bitte wenden!

Der Gradient lautet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{2\,x\,y}{(x^2-1)\,y+1} + 4\,,\, \frac{x^2-1}{(x^2-1)\,y+1} \right)^T ,$$

und insbesondere $\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Wert der Niveaulinie von f in $P(1,1)$ ist definitionsgemäss $f(1,1) = 4$.

Ein Tangentialvektor $\vec{t}$ an die Niveaulinie steht senkrecht auf dem Gradienten ∇f und hat per Konstruktion keine Komponente in $z-$Richtung, wähle also etwa $\vec{t} = (0,1,0)^T$.

b) Das Bild von f ist

$$\mathsf{F} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, f(x,y) = z \right\} ,$$

also Niveaufläche der Funktion

$$F(x,y,z) := f(x,y) - z$$

zum Niveau 0.

Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Tangentialebene an F im Punkt

$$Q = (1,0,f(1,0)) = (1,0,4)$$

ist gelich dem Gradienten von F in Q, also mit $\nabla F(x,y,z) = (\nabla f(x,y), -1)^T$

$$\vec{n} = \nabla F(1,0,4) = (\nabla f(1,0), -1)^T = (4,0,-1)^T .$$

Die Koordinatengleichung der Tangentialebene ist dann $\vec{n} \cdot (\vec{x} - Q) = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4\,x - z = 0\,.$$

2. **a)** Damit die erste Komponente von $f(x,y)$ definiert ist muss $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sein. Wegen der zweiten Komponente desweiteren $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$. Beides zusammen ergibt den Definitionsbereich $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Gleichung der Tangentialebene lautet

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle f_x(1,1) \times f_y(1,1), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - f(1,1) \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= 2x - 3y - \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

c) Wenn es einen solchen Punkt (x_0, y_0) gäbe, so müsste der Normalvektor $f_x(x_0, y_0) \times f_y(x_0, y_0)$ senkrecht auf die (xy)-Ebene stehen und das würde bedeuten, dass die beiden Vektoren $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$ parallel zur (xy)-Ebene liegen müssten. Aber $f_y(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{y_0} \\ 2y_0 \end{pmatrix}$ kann nicht parallel zur (xy)-Ebene liegen.

d) (i) Wir haben

$$h(t) = \begin{pmatrix} |t|^3 \\ \ln(t^2 e^{-t}) \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |t|^3 \\ 2\ln(t) - t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

und somit

$$h'(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(t) \cdot 3t^2 \\ \frac{2}{t} - 1 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}|t| & 0 \\ \frac{1}{t^2} & -e^{-t} \\ 0 & 2e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(t) \cdot 3t^2 \\ \frac{2}{t} - 1 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

3. **a)** Die verkettete Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lautet

$$h(u,v) = g\Big(f(u,v)\Big) = \begin{pmatrix} \ln(e^{u+v}) + \ln(e^{-u}) \\ \\ \dfrac{e^{2\,u+v}}{e^{u+v}\, e^{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ e^{2\,u} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Mit Hilfe der expliziten Formel für h können wir die Ableitung direkt bestimmen

$$dh(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\,e^{2\,u} & 0 \end{pmatrix} .$$

Um die Kettenregel zu verwenden brauchen wir zunächst die Ableitungen von f und g

$$df(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} & e^{u+v} \\ -e^{-u} & 0 \\ 2\,e^{2\,u+v} & e^{2\,u+v} \end{pmatrix} ,$$

$$dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} & 0 \\ \\ -\dfrac{z}{x^2\,y} & -\dfrac{z}{x\,y^2} & \dfrac{1}{x\,y} \end{pmatrix} ,$$

und somit

$$dg(f(u,v)) = \begin{pmatrix} e^{-(u+v)} & e^{u} & 0 \\ -e^{u-v} & -e^{3\,u} & e^{-v} \end{pmatrix}$$

Aus der Matrzienmultiplikation ergibt sich die Ableitung von h als verkettete Funktion

$$\begin{aligned} dh(u,v) &= dg(f(u,v)) \cdot df(u,v) = \\ &= \begin{pmatrix} 1-1+0 & 1+0+0 \\ -e^{2\,u}+e^{2\,u}+2\,e^{2\,u} & -e^{2\,u}+e^{2\,u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\,e^{2\,u} & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wir haben also explizit verifiziert, dass die Kettenregel stimmt.

b) Die Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in dem zu $(0,0)$ gehörigen Flächenpunkt wird aufgespannt durch die Vektoren $f_u(0,0)$ und $f_v(0,0)$, wobei

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} \\ -e^{-u} \\ 2\,e^{2\,u+v} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad f_u(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

und

$$f_v(u,v) = \begin{pmatrix} e^{u+v} \\ 0 \\ e^{2\,u+v} \end{pmatrix} , \qquad \Longrightarrow \qquad f_v(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Tangentialebene an $\mathcal{F}$ in $(0,0)$ steht senkrecht dazu:

$$\vec{n} = f_u(0,0) \times f_v(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$