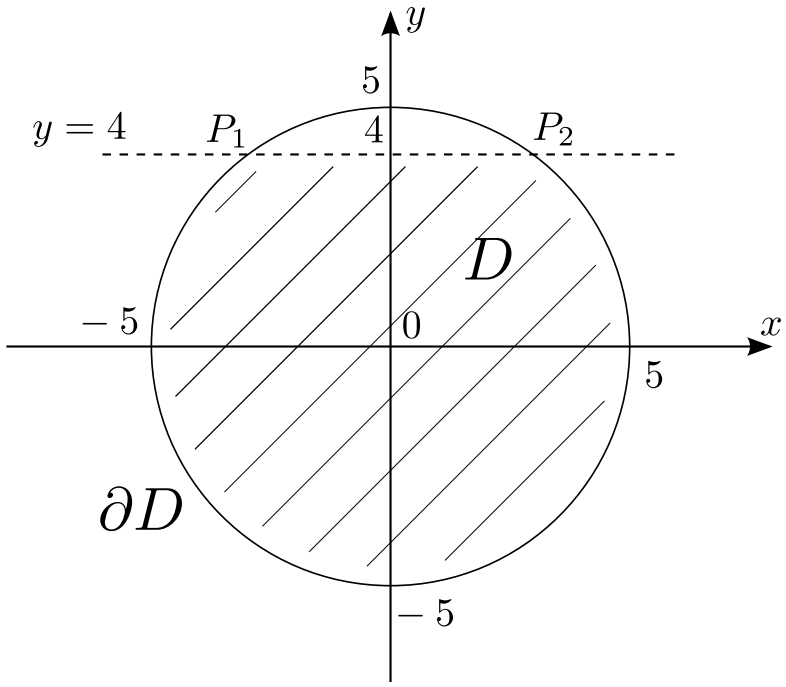
Lösungen zur Serie 8

1. Der Definitionsbereich besteht aus die untere Teil der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 5.



Da die Funktion zu beiden Hauptachsen Spiegelsymmetrisch ist,

$$f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-xy),$$

sollten die Extremalstelle sich an die gleiche Symmetrie anpassen.

Die Extremalstellen innerhalb von D erfüllen

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

Um die Extremalstelle auf dem Rand ∂D zu bestimmen, müssen wir die beiden Strecken, aus denen ∂D zusammengesetzt ist, parametrisieren.

$$\overline{P_1P_2} := \left\{ (x,y) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \in [-3,3]\,,\ y = 4 \right\}$$

Bitte wenden!

Hier kann man $g(x) := f(x,4) = -2\,x^2 + 15$ definieren.

Dann ist

$$g'(x) = -4\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

und da $g''(x) = -4 < 0$ für alle $x \in \overline{P_1 P_2}$ gilt, ist $(x,y) = (0,4)$ ein lokales Maximum. Insbesondere ist $g(0) = f(0,4) = 15$.

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{P_1 P_2} &:= \left\{ (x,y) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 25\,,\; y \le 4 \right\} = \\ &= \left\{ x = 5\,\cos t\,,\; y = 5\,\sin t \,\middle|\, t \in [0, 2\,\pi] \backslash_{[t_0, \pi - t_0]} \right\}\,, \end{aligned}$$

wobei $t_0 = \arctan(4/3) = 0.9327$ ist.

Auf $\overset{\frown}{P_1 P_2}$ definieren wir $h(t) = f(5\,\cos t, 5\,\sin t) = 25\,\sin^2 t - 50\,\cos^2 t - 1$. Dann ist

$$h'(t) = 50\,\sin t \cos t - 100\,\cos t(-\sin t) = 150\,\sin t \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0\,, \frac{\pi}{2}\,, \pi\,, \frac{3\,\pi}{2}$$

Wir betrachten dann die 2. Ableitung

$$h''(t) := 150\,(\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) = 150\,(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

Es gilt[1] $h''(0) = h''(\pi) = 150 > 0$ und $h''(\frac{3\pi}{2}) = -150 < 0$: die Funktion besitzt zwei (lokale) Minima bei $(\pm\,5, 0)$ und ein Maximum bei $(0, -5)$.

Nach Einsetzen der gefundenen Extremalstellen und Vergleichen der Werte ($f(\pm\,3, 4) = -3$, $f(0,0) = -1$), können wir schliessen, dass die gegebene Funktion
• ein globales Maximum bei $(0, -5)$ mit $f(0, -5) = 24$ und
• zwei globale Minima bei $(\pm\,5, 0)$ mit $f(\pm\,5, 0) = -51$
besitzt.

2. **a)** Die kritische Stellen der gegeben Funktion sind die Nullstellen des Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x + 6\,y \\ 2\,y + 6\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3\,y \\ x = -\dfrac{1}{3}\,y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

b) Die in der Vorlesung angestellten Berechnungen (bzgl. Methode der kleinsten Quadrate) zeigen, dass (x_0, y_0) auch ein Sattelpunkt sein kann, obwohl $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$ ist.

[1] Wir lassen den Punkt $t = \frac{\pi}{2}$ weg, da $\frac{\pi}{2} \in [t_0, \pi - t_0]$ ist und somit $h(\frac{\pi}{2}) \notin \partial D$.

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** $\mathcal{F}$ ist eine Niveaufläche der Funktion $f(x,y,z) := 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 36$ (ein Ellipsoid). Ein Vektorfeld, das überall senkrecht auf $\mathcal{F}$ steht, ist demzufolge

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet, dass die Tangentialebene in genau denjenigen Punkte parallel zur erwähnten Ebene ist, wo $\nabla f(x,y,z)$ parallel zum Normalenvektor der Ebene ist, also

$$\begin{pmatrix} 6x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen also die Schnittpunkte der Geraden

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} \\ \lambda \end{pmatrix}$$

mit dem Ellipsoid. Wir setzen dazu die Parametrisierung der Geraden in die Gleichung für $\mathcal{F}$ ein:

$$36 = 3\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda^2 = \frac{9\lambda^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 4.$$

Die gesuchten Punkte sind demzufolge

$$\pm \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) In diesem Fall ist

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D_g,\ g(x,y) = z \geq 0.\}$$

Dies führt mit $f(x,y,g(x,y)) = 3x^2 + 2y^2 + g(x,y)^2 = 36$ auf

$$g(x,y) = \sqrt{36 - 3x^2 - 2y^2}.$$

Im Punkt $(1,2)$ ist die Richtungsableitung von $g(x,y)$ minimal in Richtung

$$-\nabla g(1,2) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,2)} = -\begin{pmatrix} -\frac{3x}{\sqrt{36-3x^2-2y^2}} \\ -\frac{2y}{\sqrt{36-3x^2-2y^2}} \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

und ihr Wert in diese Richtung ist

$$D_{-\frac{\nabla g(1,2)}{|\nabla g(1,2)|}} = \langle \nabla g(1,2), \frac{-\nabla g(1,2)}{|\nabla g(1,2)|} \rangle = -\,|\nabla g(1,2)| = -\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = -1.$$