Lösungen zur Serie 9

1. Die Arbeit eines Vektorfeldes F entlang eines Weges $\gamma \in \mathbb{R}^2$ von A bis B ist gegeben durch

$$A := \int_\gamma F = \int_{\gamma^{-1}(A)}^{\gamma^{-1}(B)} \langle F(\gamma(t))\,,\, \dot\gamma(t)\rangle \; dt =$$
$$= \int_u^v \Big(F_1\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\, \dot\gamma_1(t) + F_2\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)\, \dot\gamma_2(t) \Big)\, dt\,,$$

wobei $\gamma : [u, v] \to \mathbb{R}^2$ eine (beliebige) Parametrisierung des Weges $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ ist. (mit $\gamma(u) = A$ und $\gamma(v) = B$)

a) Wir whälen die folgende Parametrisierung $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2\,t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 1]$. Dann ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_1 t \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2\,t \end{pmatrix}$.

Die Arbeit ist

$$A = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 2\,t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (5\,t - 1)\, dt = \frac{5}{2}\, t^2 - t^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}\,.$$

b) Den Parabelbogen parametrisieren wir durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 1]$. Dann ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,t \end{pmatrix}$ und $F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t)\,\gamma_2(t) \\ -\gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix}$.

Insgesamt

$$A = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (t^3 - 2\,t^3)\, dt = -\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}\,.$$

c) Wir wählen die gewönliche Parameterdarstellung des Kreises:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\,\pi]\,.$$

Bitte wenden!

Daraus ergibt sich

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 2\gamma_1(t) - \gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) + 2\,\gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\cos t - \sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix}.$$

und somit

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\,\cos t - \sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2\,\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2}_{=1} + 2\,\sin t \cos t \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt = t\Big|_0^{2\,\pi} = 2\,\pi\,. \end{aligned}$$

d) Eine Ellipse um (x_0, y_0) mit Halbachsen a, b erfüllt die Gleichung

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Aus der Parameterdarstellung des Kreises kann man leicht eine Parametriesierung der obigen Ellipse herleiten, in den man x bzw. y mit a bzw. b skaliert und dann um x_0 bzw. y_0 verschiebt. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a\,\cos t \\ y_0 + b\,\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\,\pi]\,.$$

Insbesondere lautet die Parameterdarstellung der gegebenen Ellipse
$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ -2 + 2\,\sin t \end{pmatrix}$ und somit

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\,\cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\gamma(t)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 - 2\,\sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix}.$$

Die Arbeit ist dann

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 - 2\,\sin t \\ 1 + \cos t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\,\cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-2\,\sin t + 2\,\sin^2 t + 2\,\cos t + 2\,\cos^2 t \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sin^2 t + \cos^2 t \right)}_{=1} dt = t\Big|_0^{2\,\pi} = 2\,\pi\,. \end{aligned}$$

In der obigen Berechnung haben wir die Eigenschaft der Sinus- und Cosinusfunktion verwendet, um $\int_0^{2\pi} \sin t\, dt$ sowie $\int_0^{2\pi} \cos t\, dt$ wegzukurzen.

Siehe nächstes Blatt!

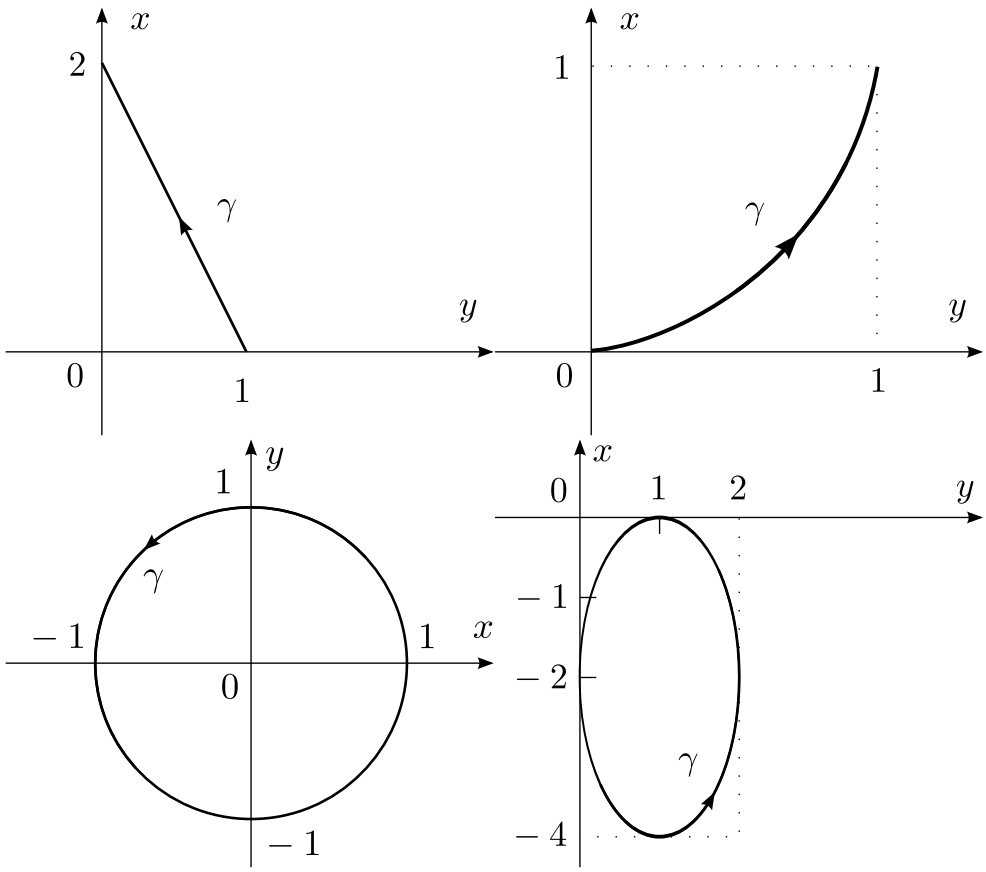
e) Bei **b)** könnten wir z.B. den Parabelbogen wie folgt parametrisien

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0,1], \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} t\sqrt{t} \\ -t \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$A = \int_0^1 \begin{pmatrix} t\sqrt{t} \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{2} - t \right) dt = -\frac{t^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}\,.$$

Wir haben also verifiziert, dass die Arbeit unabängig von Wahl der Parametrisierung ist.



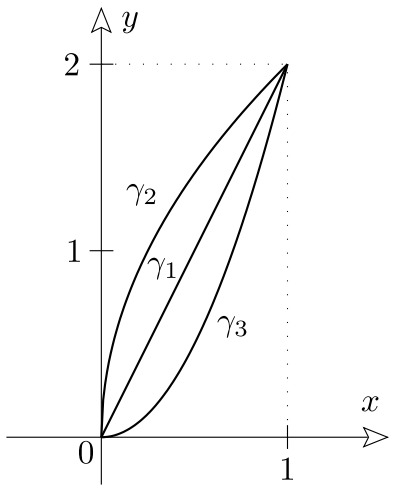
2. Wir parametrisieren die zu betrchtenden Kurven wie folgt

Bitte wenden!

a) $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \quad$ und $\quad \dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2\,t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \quad$ und $\quad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4\,t \end{pmatrix}$

c) $\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \quad$ und $\quad \dot{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} 2\,t \\ 2 \end{pmatrix}$



Dann ist für $F(x,y) = (x\,y, 2\,x^2)^T$

a)

$$A_1 = \int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\,t^2 \\ 2\,t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 6\,t^2\,dt = 2\,t^3\Big|_0^1 = 2$$

b)

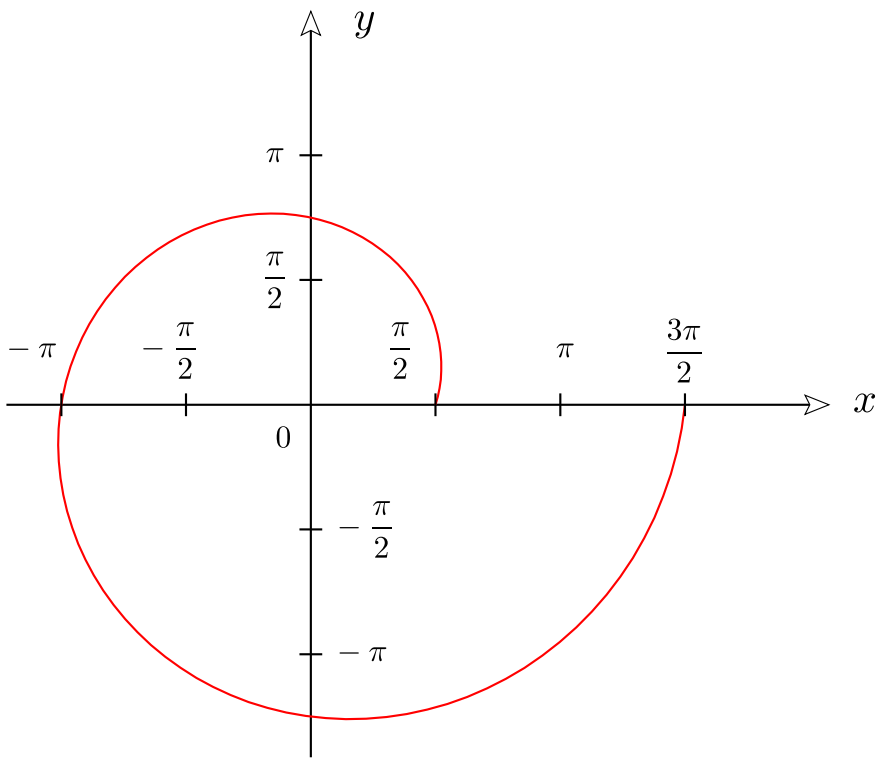
$$A_2 = \int_{\gamma_2} F \cdot ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\,t^3 \\ 2\,t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4\,t \end{pmatrix} ds = \int_0^1 10\,t^3\,dt = \frac{10}{4}\,t^4\Big|_0^1 = \frac{5}{2}$$

c)

$$A_3 = \int_{\gamma_3} F \cdot ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\,t^3 \\ 2\,t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,t \\ 2 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 8\,t^4\,dt = \frac{8}{5}\,t^5\Big|_0^1 = \frac{8}{5}$$

3. **a)** Die gegebene Kurve ist eine archimedische Spirale

Siehe nächstes Blatt!



b) Falls F ein Potentialfeld ist, können wir

$$V(x,y) := \int_{\gamma_0} F \cdot ds$$

als Potential wählen, wobei γ_0 ein beliebiger Weg von $(0,0)$ (da $F(0,0) = 0$ ist) bis (x,y) ist.
Der Einfachheit halber (da ein Potentialfeld "unabhängig von Weg "ist), wählen wir

$$\gamma_0(t) = t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0,1] \ \text{ so dass } \gamma_0(0) = (0,0)\,,\ \gamma_0(1) = (x,y)\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(ty) \\ t\,x\,\cos(ty) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dt = \int_0^1 x\,(\sin(ty) + t\,y\,\cos(ty))\,dt = \\ &= x \int_0^1 \sin(ty)\,dt + x\,y \underbrace{\int_0^1 t\,\cos(ty)\,dt}_{\overset{P.I.}{=} t\frac{\sin(ty)}{y}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(ty)}{y}\,dt} = \\ &= x \int_0^1 \sin(ty)\,dt + t\,x\sin(ty)\Big|_0^1 - x \int_0^1 \sin(ty)\,dt = x\,\sin y \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Schlussendlich verifizieren wir, ob V das zu F gehöriges Potential ist

$$dV(x,y) = \left(Vx(x,y)\,,\ \frac{\partial V}{\partial y} \right) = (\sin y\,,\ x\ \cos y)$$

Da die rechte Siete genau $F(x,y)$ enstpricht, ist F ein Potentialfeld.

c) Mit **b)** erhalten wir

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma dV = V\left(\gamma(\pi)\right) - V\left(\gamma(0)\right) = V\left(3\frac{\pi}{2}, 0\right) - V\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0 - 0 = 0\,.$$

Eventuell könnte man die Arbeit auch direkt bestimmen

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin((\frac{\pi}{2} + t)\ \sin(2\,t)) \\ (\frac{\pi}{2} + t)\ \cos(2\,t)\ \cos((\frac{\pi}{2} + t)\ \sin(2\,t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\,t) - 2\,(\frac{\pi}{2} + t)\ \sin(2\,t) \\ 2\,(\frac{\pi}{2} + t)\ \cos(2\,t) + \sin(2\,t) \end{pmatrix} dt = \ldots$$

was aber nicht durchführbar ist.