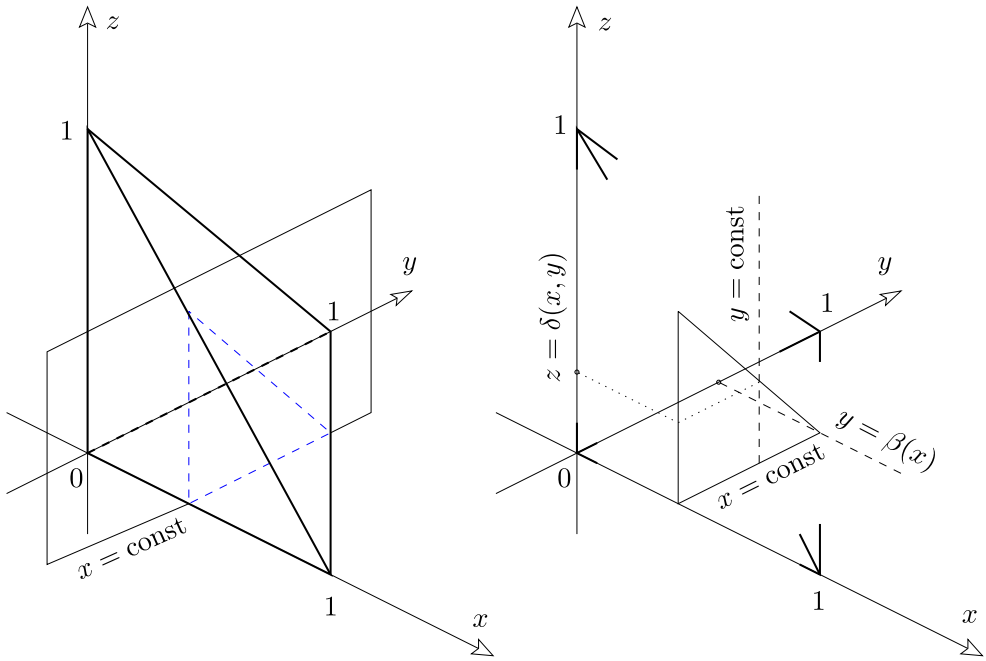
Lösungen zur Serie 11

1. Die Integrationsgrenzen a, b, α, β, γ und δ kann man mit Hilfe des folgenden Bildes bestimmen.



Der minimale Wert, den jede Variabel annehmen darf, ist jewails 0, d.h. $a = \alpha = \gamma = 0$.

Jede Schnitte $\{x = konst\}$ besteht aus einem Dreieck mit Kanten $\{z = 0\}$, $\{y = 0\}$ und $\{x + y + z = 1\}$.

Für x fest und z beliebig (aber $z \in [0, 1]$) kann man y zwischen 0 und $1 - z - x$ variieren: der maximal Wert ist dann $\beta(x) = 1 - x$ (für $z = 0$).

In änlicher Weise, kann man z zwischen 0 und $1 - x - y$ variieren, aber mit x und y fest, darf man nichts mehr maximieren: die oebere Grenze für z ist schon $\delta(x, y) = 1 - x - y$.

Bitte wenden!

Das gesuchte Integral kann man wie folgt bestimmen

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\int\limits_0^{1-x-y} (y^2+z^2)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \left(\left(z\,y^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x-y} \right) dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{1-x} \Big((1-3\,x+3\,x^2-x^3) - (3-6\,x+3\,x^2)\,y + (6-6\,x)\,y^2 - 4\,y^3 \Big)\,dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left(\left((1-3\,x+3\,x^2-x^3)\,y - (3-6\,x+3\,x^2)\frac{y^2}{2} + (2-2\,x)\,y^3 - y^4 \right) dy \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - 2\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{6} \left(x - 2\,x^2 + 2\,x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}$$

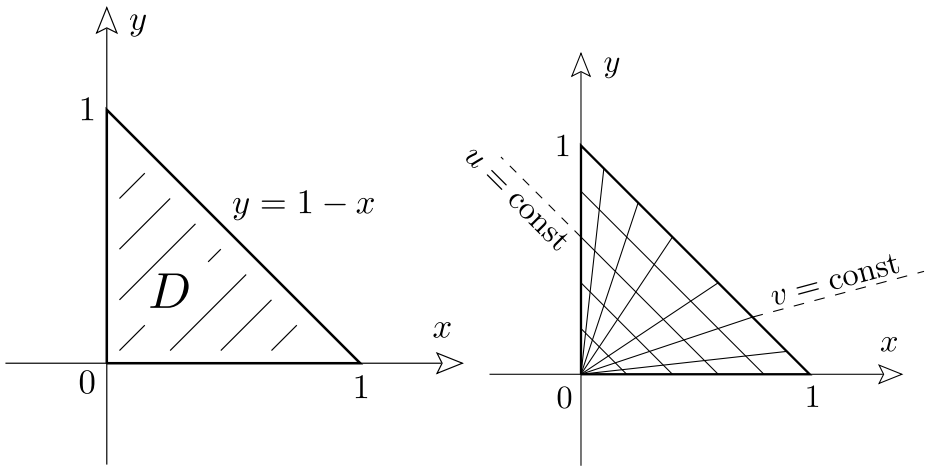
2. a)

$$I := \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx = \iint\limits_D ,$$

wobei

$$D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le 1-x \right\}$$

wird hier unten gezeichnet.



b) Transformation der Koordinaten

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ u\,v \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die Koordinatenlinien lauten (vgl. oben)

$$\{u = A = konst.\} \;\leftrightarrow\; \{x + y = A\} \;\leftrightarrow\; \{y = A - x\}$$

$$\{v = B = konst.\} \;\leftrightarrow\; \left\{\frac{y}{x+y} = B\right\} \;\leftrightarrow\; \left\{y = \frac{B}{1-B}\,x\right\}$$

Integrationsgrenzen (Kanten von D)

$$\left.\begin{array}{lll} \{u = 1\} & \leftrightarrow & \{y = 1 - x\} \\ \{v = 0\} & \leftrightarrow & \{y = 0\} \\ \{v = 1\} & \leftrightarrow & \{x = 0\} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \le u \le 1\,,\; 0 \le v \le 1$$

c) Sei

$$\varphi : [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$$

die obige Transformation der Koordinaten. Dann ist

$$d\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Im Allgemein gilt

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\tilde{D}} f(\varphi(u,v))\Big|\det\Big(d\varphi(u,v)\Big)\Big|\,du\,dv\,.$$

Hier ist $\Big|\det\Big(d\varphi(u,v)\Big)\Big| = \big|(1-v)u + v\,u\big| = |u| = u$ und somit

$$I = \int\limits_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^1 e^{\frac{u\,v}{u-u\,v+u\,v}}\,u\,du\,dv =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 e^v\,u\,du\,dv = \int_0^1 e^v \left(\frac{u^2}{2}\Big|_0^1\right) dv = \frac{1}{2}\left(e^v\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\,(e-1)\,.$$

3. Die Randkurven legen es nahe,

$$u = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad v = x^2 - y^2$$

zu setzen. Somit finden wir für x und y in Abhängigkeit von u und v

$$x(u,v) = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \quad \text{und} \quad y(u,v) = \sqrt{\frac{u-v}{2}}$$

Mit

$$h(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

findet man

$$dh(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u+v}} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u+v}} \\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u-v}} & -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{u-v}} \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf die Determinante

$$\det\left(dh(u,v)\right) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}.$$

Deshalb ist

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\tilde{\Omega}} f(x(u,v),y(u,v))|\det\left(dh(u,v)\right)|\,du\,dv =$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_1^4 \left(\int\limits_4^9 \left(f\left(\sqrt{\frac{u+v}{2}},\sqrt{\frac{u-v}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}\right)du\right)dv =$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_1^4 \left(\int\limits_4^9 \left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}\cdot\sqrt{\frac{u-v}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}\right)du\right)dv =$$

$$\frac{1}{8}\int\limits_1^4 \left(\int\limits_4^9 1du\right)dv = \frac{5}{8}\int\limits_1^4 1dv = \frac{15}{8}.$$