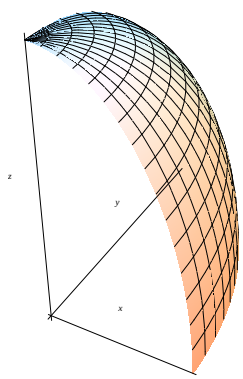
Lösungen zur Serie FERIEN

1. Der obere Rand des Körpers, über den integriert werden soll, genügt der Gleichung

$$z = \delta(x, y) = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}.$$

Diese Fläche schneidet die $x - y-$Ebene (also $z = 0$) in der Kurve

$$y = \beta(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



Wir können den Körper als die Menge aller Punkte

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \beta(x) \quad \text{und} \quad 0 \leq z \leq \delta(x, y)$$

Bitte wenden!

cahrakterisieren. Dies Führt zu

$$\int_0^a \left(\int_0^{\beta(x)} \left(\int_0^{\delta(x,y)} yz\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^{\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}} yz\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left(yz^2 \Big|_0^{\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}} \right) dy \right) dx =$$

$$\frac{c^2}{2a^2b^2}\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \left((a^2b^2-b^2x^2)y - a^2y^3\right) dy \right) dx =$$

$$\frac{c^2}{2a^2b^2}\int_0^a \left(\left(\frac{a^2b^2-b^2x^2}{2}y^2 - \frac{a^2}{4}y^4 \right) \Big|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \right) dx =$$

$$\frac{c^2}{4a^4}\int_0^a \left((a^2b^2-b^2x^2)(a^2-x^2) - \frac{b^2}{2}(a^2-x^2)^2 \right) dx =$$

$$\frac{c^2}{4a^4}\int_0^a \left(\frac{a^4b^2}{2} - a^2b^2x^2 + \frac{b^2}{2}x^4 \right) dx = \frac{c^2}{4a^4}\left(\frac{a^4b^2}{2}x - \frac{a^2b^2}{3}x^3 + \frac{b^2}{10}x^5 \right)\Big|_0^a =$$

$$\frac{c^2}{4a^4}\left(\frac{a^5b^2}{2} - \frac{a^5b^2}{3} + \frac{a^5b^2}{10} \right) = ab^2c^2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{15}ab^2c^2$$

2. Offenbar ist

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, 1 < x < 3,\ \frac{1}{x} < y < \frac{2}{x}\}$$

der schraffierte Bereich.

Direkt:

$$\int_1^3 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^{\frac{3}{2}} y\,dydx = \int_1^3 \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}y^2\Big|_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x^{\frac{3}{2}}\left(4x^{-2} - x^{-2}\right)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^3 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\left(2\,x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^3 \right) = 3\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Die Abbildung

$$\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{v}{u} \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

mit der Jacobi-Determinante

$$\det D\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

bildet offenbar den Bereich

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 |\, 1 < u < 3,\ 1 < v < 2\}$$

diffeomorph auf D ab. Somit ist

$$\int_1^3 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^{\frac{3}{2}} y \, dy dx = \int_1^3 \int_1^2 u^{\frac{3}{2}} \frac{v}{u} \left| \frac{1}{u} \right| dv du = \int_1^2 v \, dv \int_1^3 u^{-\frac{1}{2}} \, du$$
$$= \frac{1}{2} v^2 \Big|_1^2 \cdot 2\, u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^3 = 3\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

3. Für den Satz von Gauss berechnen wir die Divergenz von v:

$$\operatorname{div} v(x,y,z) = 1.$$

Bezeichnen wir mit D die Kreisscheibe $\{(x,y,z) | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$, dann gilt nach dem Satz von Gauss:

$$\int_H \operatorname{div} v d^3x = \int_{\partial H} \langle v, n \rangle d\sigma = \int_D \langle v, -e_z \rangle d\sigma + \int_S \langle v, e_r \rangle d\sigma,$$

wobei $e_z(x,y,z) = (0,0,1)^T$ und $e_r(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)^T$.

Somit:

$$\int_S \langle v, e_r \rangle d\sigma = \int_H \operatorname{div} v d^3x - \int_D \langle v, -e_z \rangle d\sigma = \frac{2}{3}\pi - \int_D -1 d\sigma = \frac{2}{3}\pi + \pi = \frac{5}{3}\pi.$$

4. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z \end{pmatrix}$$

und das Dreieck D mit den Ecken $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$.

Bitte wenden!

a) Ist das Vektorfeld F wirbelfrei? Begründen Sie Ihre Antwort! Berechnen Sie die Arbeit von F längs des Randes von D (von A über B und C nach A).

Es gilt

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

Also ist F **wirbelfrei**. Da der Definitionsbereich (ganz $\mathbb{R}^3$) von F einfach zusammenhängend ist und $\operatorname{rot} F = 0$, ist F **konservativ**, d.h. die Arbeit von F längs des geschlossenen Weges ∂D ist gleich $\underline{0}$. Dies folgt direkt aus dem **Satz von Stokes**:

$$\underline{A} = \int\limits_{\gamma=\partial D} F\, ds = \iint\limits_{D} \langle \operatorname{rot} F, \underline{n} \rangle \, du\, dv = \underline{0}.$$

(<u>Alternative</u>: Durch partielle Integration der Komponenten von F kann explizit eine Potentialfunktion $V(x,y,z)$ bestimmt werden, so dass $\nabla V(x,y,z) = F(x,y,z)$. Man berechnet: $\underline{V(x,y,z) = xy + \frac{3}{2}z^2 + C}$.)

b) Bestimmen Sie den Fluss von F sowohl durch das Dreieck D als auch durch die Oberfläche des Tetraeders mit Grundfläche D und Spitze $S(0,1,0)$.
<u>Skizze</u>:

Parametrisierung des Dreiecks D:

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \mapsto a(u,v) = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u+v \\ v \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & u & \leq & 1 \\ 0 & \leq & v & \leq & 1-u \end{array} \right|$$

Normalenvektor:

$$\underline{n} = a_u \times a_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit ist der **Fluss** von F durch das Dreieck D

$$\begin{aligned}
\underline{\Phi_D} &= \iint\limits_D \langle F, \underline{n}\rangle \, dv\, du \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-u} \langle F\left(a(u,v)\right), \underline{n}\rangle \, dv\, du \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-u} \begin{pmatrix} u+v \\ u \\ 3v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dv\, du \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-u} 4v\, dv\, du = \int\limits_0^1 \left(2v^2 \Big|_0^{1-u} \right) du \\
&= \int\limits_0^1 2(1-u)^2\, du = \left(2u - 2u^2 + \frac{2}{3}u^3 \Big|_0^1 \right) = \underline{\frac{2}{3}}\,.
\end{aligned}$$

Nach dem **Satz von Gauss** gilt für den Fluss durch die Oberfläche (∂T) des Tetraeder T

$$\int\limits_{\partial T} \langle F, \underline{n}\rangle \, du\, dv = \int\limits_T \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \int\limits_T 3\, dx\, dy\, dz = 3 \cdot \mathrm{Vol}(T).$$

T ist eine Pyramide mit dem Dreieck $A(0,0,0), B(1,1,0), S(0,1,0)$ als Grundfläche und dem Punkt $C(0,1,1)$ als Spitze (siehe Skizze). Die Grundlfläche hat Inhalt $\frac{1}{2}$, also ist

$$\mathrm{Vol(T)} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Also gilt für den **Fluss durch** T

$$\underline{\Phi_T} = 3 \cdot \mathrm{Vol}(T) = \underline{\frac{1}{2}}\,.$$

[Daraus lässt sich <u>alternativ</u> auch der Fluss durch das Dreieck D berechnen, indem man vom Fluss durch T die Flüsse durch die anderen Dreiecksseiten des Tetraeders abzieht.
Der Fluss durch das Dreieck $D_1 = ((0,0,0),(1,1,0),(0,1,0))$ (von T nach aussen) ist

$$\underline{\Phi_{D_1}} = \int_{D_1} F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dxdy = \underline{0}.$$

Bitte wenden!

Der Fluss durch das Dreieck $D_2 = ((0,0,0),(0,1,0),(0,1,1))$ (von T nach aussen) ist

$$\underline{\Phi_{D_2}} = \int_{D_2} F\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} dydz = \int_{D_2}(-y)dydz = \int_0^1\left(\int_0^y(-y)dz\right)dy = -\int_0^1 y^2dy = \underline{-\frac{1}{3}}.$$

Der Fluss durch das Dreieck $D_3 = ((0,1,0),(1,1,0),(0,1,1))$ (von T nach aussen) ist

$$\underline{\Phi_{D_3}} = \int_{D_3} F\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} dxdz = \int_{D_3} xdxdz = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} xdz\right)dx = \int_0^1(x-x^2)dx = \underline{\frac{1}{6}}.$$

Zusammen erhalten wir für den **Fluss durch** D

$$\underline{\Phi_D} = \Phi_T - \Phi_{D_1} - \Phi_{D_2} - \Phi_{D_3} = \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \underline{\frac{2}{3}}\,.]$$

5. Wir haben

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = xz\sin(y) - xz\sin(y) + e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}.$$

Mit dem Satz von Gauss gilt dann für den Zylinder Z:

$$\int_{\partial Z}\langle F,n\rangle d\sigma = \int_Z \operatorname{div} F dxdydz = \int_Z e^{x^2+y^2}dxdydz.$$

In Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos(\varphi)\\r\sin(\varphi)\\z\end{pmatrix}$$

mit Jacobi-Determinante r bekommen wir

$$\int_{\partial Z}\langle F,n\rangle d\sigma = \int_0^{\sqrt{2}} dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^3 dzre^{r^2}.$$

Das z- und das φ-Integral können unmittelbar ausgeführt werden. übrig bleibt:

$$\int_{\partial Z}\langle F,n\rangle d\sigma = 6\pi\int_0^{\sqrt{2}} re^{r^2}dr.$$

Da (Hinweis) $\frac{d}{dr}\left(e^{r^2}\right) = 2re^{r^2}$, kann auch das verbleibende Integral mühelos berechnet werden:

$$\int_{\partial Z}\langle F,n\rangle d\sigma = 6\pi\frac{1}{2}\,e^{r^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 3\pi(e^2-1).$$

Siehe nächstes Blatt!

6. **a)** $\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-x \\ 0-y \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2+xy-(-2+xy) \\ 0-\frac{y^2}{2} \\ yz-xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{y^2}{2} \\ yz-xy \end{pmatrix}$$

b) $\operatorname{rot} F$ steht überall senkrecht auf $(1,0,0)^T$ und die $x-$Komponente von $\operatorname{rot} G$ ist konstant.

c) Die Arbeit des Vektorfeldes F längs einer geschlossenen Kurve γ in einer Ebene senkrecht zur x-Achse ist 0, da der Normalenvektor der umrandeten Fläche sinkrecht auf $\operatorname{rot} F$ steht und die Arbeit von G ist 4 mal die umrandete Fläche, da das Skalarprodukt von ihrem Normalenvektor mit $\operatorname{rot} G$ gerade 4 ist.

7. **a)** $\operatorname{div} F(x,y,z) = 6$. Zusammen mit dem Satz von Gauss und

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

für das Volumen V eines Kegels K mit Radius r und Höhe h folgt bereits das Resultat:

$$\int_{\partial K} \langle F, n\rangle d\sigma = \int_K \operatorname{div} F d^3x = 6\frac{1}{3}\pi 3^2 3 = 54\pi.$$

b) $G(x,y,z) = (x^2-3yz)(1,1,1)^T$. Da der Vektor $(1,1,1)^T$ parallel zur Dreiecks-Ebene steht, steht der Normalenvektor der Dreiecksfläche senkrecht auf G und der Fluss ist 0.

8. **a)** $\displaystyle\int_0^1 \langle V(tv_{AB}), v_{AB}\rangle dt = \int_0^1 (8t^3+4t)dt = 4 =: A$

b)
$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle V(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt &= \int_{\partial\Delta} \langle V(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt - A \\ &\overset{\text{Stokes}}{=} -A + \int_\Delta \langle \operatorname{rot} V(x,y,z), n\rangle d\sigma \\ &= -A, \text{ da } \operatorname{rot} V = 0. \end{aligned}$$