ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Winter 2013

Musterlösung zur Prüfung

(9 P)

1. a)

$$\begin{aligned}
&\ln(x^{\frac{3}{2}}) + \ln(\ln(e^{\sqrt{x}})) + (\ln x)^2 + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&= \ln(x^{\frac{3}{2}}) + \ln(\sqrt{x}) + \ln(x)\ln(x) + \ln(1) - \ln(x^3) \\
&= \ln(x^{\frac{3}{2}}) + \ln(x^{\frac{1}{2}}) + \ln(x)\ln(x) - \ln(x^3) \\
&= \ln\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{x^3}\right) + \ln(x)\ln(x) \\
&= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x)\ln(x) \\
&= \ln(1) - \ln(x) + \ln(x)\ln(x) \\
&= \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0
\end{aligned}$$

Somit findet man die beiden Lösungen

$$\begin{aligned}
\ln(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \\
\ln(x) - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_2 = e.
\end{aligned}$$

b) Mit

$$|1+i| = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2}$$

und

$$|\sqrt{2} - 4i| = \sqrt{(\sqrt{2} - 4i)(\sqrt{2} + 4i)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ist

$$\left|\frac{ze^{i\frac{\pi}{6}}}{1+i}\right| = \left|\frac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right| \Leftrightarrow \frac{|z||e^{i\frac{\pi}{6}}|}{|1+i|} = \frac{|z|^2}{|\sqrt{2}-4i|} \Leftrightarrow \frac{|z|}{\sqrt{2}} = \frac{|z|^2}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z| = 3.$$

Sei nun $w = \sqrt{3} + i$. Mit

$$|w| = \sqrt{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{4} = 2, \quad \arg w = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

und

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Bitte wenden!

erhält man für $z = 3e^{i\varphi}$

$$\arg(|z|^3 e^{3i\varphi}) = \arg\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}3e^{i\varphi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) = \arg(6e^{i(\varphi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})})$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \quad k = 0, 1$$

und somit

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}, \qquad \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Das entspricht den beiden komplexen Zahlen

$$z_1 = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$
$$z_2 = 3\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 3i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

2. Mit der Taylor Formel **(6 P)**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}(x - x^*)^k$$

und

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & (x+1)^{\frac{3}{2}} & , \quad f(0) = 1 \\ f^{(1)}(x) & = & \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}} & , \quad f^{(1)}(0) = \frac{3}{2} \\ f^{(2)}(x) & = & \frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{1}{2}} & , \quad f^{(2)}(0) = \frac{3}{4} \\ f^{(3)}(x) & = & -\frac{3}{8}(x+1)^{-\frac{3}{2}} & , \quad f^{(3)}(0) = -\frac{3}{8} \end{array}$$

erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{48}x^3 \\ &= 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Der gesuchte Grenzwert ist demnach

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\mathfrak{o}(x^4)}{x^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3}{2x}+\frac{3}{8}-\frac{x}{16}+\mathfrak{o}(x^2)-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{8}-\frac{x}{16}+\mathfrak{o}(x^2)\right)\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

3. Die Gleichgewichtslösungen von $(*)$ erfüllen **(4 P)**

$$F(x) = x^2(x^2-4) = 0$$

und sind somit $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$.
Das Monotonieverhalten der Lösungskurven für die gegebenen Stellen $a = 1$ und $a = -1$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned}0 < x < 2: &\qquad F(x) < 0\\ -2 < x < 0: &\qquad F(x) < 0\end{aligned}$$

Um die Stabilität der Gleichgewichtslagen zu überprüfen betrachtet man

$$F'(x) = 4x^3 - 8x$$

und somit

$$\begin{aligned}&F'(x_1) = F'(0) = 0, && \Rightarrow \text{keine Aussage möglich}\\ &F'(x_2) = F'(2) = 32-16 = 16 > 0 && \Rightarrow \text{instabil}\\ &F'(x_3) = F'(-2) = -32+16 = -16 < 0 && \Rightarrow \text{stabil}\end{aligned}$$

4. a) Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass **(11 P)**

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*} = \frac{C}{\sqrt{f(x^*)}}$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{df}{dx} = \frac{C}{\sqrt{f}} \;\Leftrightarrow\; \int \sqrt{f}\,df = C\int dx \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}} = Cx + D$$

$$\Leftrightarrow\; f(x) = \left(\frac{3}{2}(Cx+D)\right)^{\frac{2}{3}}$$

Bitte wenden!

Aus

$$f(0) \stackrel{!}{=} 9 = \left(\frac{3}{2}D\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \pm 3 = \left(\frac{3}{2}D\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \pm 27 = \left(\frac{3}{2}D\right) \Leftrightarrow \pm 18 = D$$

und aus

$$f(1) \stackrel{!}{=} 1 = \left(\frac{3}{2}(C \pm 18)\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \pm 1 = \frac{3}{2}(C \pm 18) \Leftrightarrow \pm 1 = \frac{3}{2}C \pm 27 \Leftrightarrow \mp\frac{52}{3} = C$$

folgt für die gesuchte Funktion

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\left(\mp\frac{52}{3}x \pm 18\right)\right)^{\frac{2}{2}} = (\mp 26x \pm 27)^{\frac{2}{3}}\,.$$

b) Die Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t) + \ln t$$

ist eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die zum Beispiel mittels Variation der Konstanten gelöst werden kann.
Die homogene Gleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{t}x(t)$$

ist separierbar:

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{t}x \\
\Leftrightarrow \qquad \frac{dx}{x} &= \frac{2}{t}\,dt \\
\Leftrightarrow \qquad \int \frac{dx}{x} &= 2\int \frac{1}{t}\,dt \\
\Leftrightarrow \qquad \ln x &= 2\ln t + c = \ln t^2 + c \\
\Leftrightarrow \qquad x_h(t) &= e^{\ln t^2 + c} = Ct^2
\end{aligned}$$

Für den inhomogenen Teil macht man den Ansatz

$$x(t) = C(t)t^2$$

Das liefert

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{C}(t)t^2 + 2tC(t) \\
&= 2tC(t) + \ln t
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \dot{C}(t) &= \frac{\ln t}{t^2} \\
\Leftrightarrow \quad C(t) &= \int \underset{\downarrow}{\ln t} \cdot \underset{\uparrow}{t^{-2}}\, dt \\
&= -\frac{\ln t}{t} + \int \frac{1}{t^2}\, dt \\
&= -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \\
\Rightarrow \quad x_i(t) &= \left(-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right) t^2 = -t \ln t - t
\end{aligned}
$$

Somit folgt für die allgemeine Lösung

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) = Ct^2 + t(-1 - \ln t)$$

(18 P)

5. a) (u, v) parametrisieren die Schnittkurve $S := \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ genau dann, wenn

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2)(u, v) &= f(a(u, v)) \\
&= f \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv \end{pmatrix} \\
&= u^2 + v^2 - 2uv \\
&= (u - v)^2 = 0 \\
\Rightarrow \quad u &= v
\end{aligned}
$$

Also ist die Schnittkurve gegeben durch

$$S : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv \end{pmatrix} \Big|_{u=v} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Somit sind die gemeinsamen Punkte der Flächen, die in der Ebene $z = 4$ liegen

$$S \cap \mathcal{E}_{z=4}\, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \Big|_{t^2=4} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \Big|_{t=\pm 2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Oder, ausgehend von den beiden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
uv = 4 \quad &\Rightarrow \quad u = \frac{4}{v} \\
u^2 + v^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad v^4 + 16 - 8v^2 = 0
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

findet man

$$v^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad v = \pm 2, \quad u = \pm 2$$

und somit die gemeinsamen Punkte

$$\mathcal{F}_1(2,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1(-2,-2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Setzt man

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{y} = v \\ z &= uv = x\sqrt{y} \end{aligned}$$

so bekommt man eine Koordinatendarstellung von $\mathcal{F}_1$:

$$\mathcal{F}_1 : g(x,y,z) = \pm x\sqrt{y} - z = 0$$

Die Schnittkurve erhält man nun durch

$$\begin{aligned} \pm x\sqrt{y} &= \frac{1}{2}(x^2 + y) \\ x^2 \mp 2x\sqrt{y} + y &= 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{y} \pm \sqrt{4y - 4y}}{2} = \pm\sqrt{y}$$

Eine Parameterdarstellung der Schnittkurve wäre also mit $x = t$ aus

$$\begin{aligned} x^2 &= y & \Rightarrow \quad y = t^2 \\ x^2 + y - 2z &= 2t^2 - 2z = 0 & \Rightarrow \quad z = t^2 \end{aligned}$$

$$h(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchten Schnittpunkte mit der Ebene $z = 4$ sind somit

$$\begin{pmatrix} \pm 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Parameterdarstellung der Tangentialebene von

$$\mathcal{F}_1 : a(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

am Punkt

$$a(2,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

errechnet sich aus den Tangentialvektoren

$$t_u = \left.\frac{\partial a(u,2)}{\partial u}\right|_{u=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t_v = \left.\frac{\partial a(2,v)}{\partial v}\right|_{v=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatengleichung erhält man nun mittels Elimination der Parameter

$$\begin{aligned} x &= 2 + k \quad \Leftrightarrow \quad h = x - 2 \\ y &= 4 + 4k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{y}{4} - 1 \\ z &= 4 + 2h + 2k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 4 + 2(x-2) + 2(\frac{y}{4} - 1) - z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + y - 2z - 4 = 0.$$

Die Koordinatengleichung der Tangentialebene von

$$\mathcal{F}_2 : f(x,y,z) = x^2 + y - 2z = 0$$

an

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist

$$\left\langle \operatorname{grad} f_{(2,4,4)}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{(2,4,4)}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 4(x-2) + (y-4) - 2(z-4) = 4x + y - 2z - 4 = 0$$

b) Für die gesuchte Funktion gilt $g(x,z) = z$. Somit ist

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y).$$

Die Niveaulinien von g sind diejenigen Kurven in der (x,y)-Ebene, entlang welchen g konstant ist

$$\begin{aligned} g(x,y) = c &= \frac{1}{2}(x^2 + y) \\ \Leftrightarrow \quad y &= 2c - x^2. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Aus

$$\operatorname{grad} g(2,3) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e} = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die Richtungsableitung an der Stelle $(2,3)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D_{\vec{e}} g(2,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

c) Die Fläche ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse, weil $v^2 = (-v)^2$.
Die Fläche ist symmetrisch zur xy-Ebene. (Selbe Begründung.)
Die Fläche ist symmetrisch zur zy-Ebene.

d) **i)** Aus

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{a} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & a(u,v) & \mapsto & f(a(u,v)) \end{array}$$

wird ersichtlich, dass

$$h(u,v) = f(a(u,v)) = f \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv \end{pmatrix} = u^2 + v^2 - 2uv$$

und somit

$$dh(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u - 2v & 2v - 2u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

ii) Dasselbe Resultat erhält man mit der Kettenregel

$$da(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial u} & \frac{\partial a_1}{\partial v} \\ \frac{\partial a_2}{\partial u} & \frac{\partial a_2}{\partial v} \\ \frac{\partial a_3}{\partial u} & \frac{\partial a_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \\ v & u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

$$\Rightarrow \quad df(a(u,v)) = \begin{pmatrix} 2u & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dh(u,v) = df(a(u,v)) \cdot da(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u - 2v & 2v - 2u \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

6. Der Übergang zu Kugelkoordinaten **(4 P)**

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

mit Jakobideterminante

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ =&r^2\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi + r^2\sin\vartheta\sin^2\varphi\cos^2\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi \\ =&r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + r^2\sin^3\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\ =&r^2\sin\vartheta(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta) \\ =&r^2\sin\vartheta \end{aligned}$$

führt zu

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta d\varphi dr \\ =&\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\cos\varphi\sin\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta d\varphi dr \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{\downarrow}{\sin^3\vartheta}\underset{\uparrow}{\cos\vartheta}\,d\vartheta = \sin^4\vartheta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = 1-3I \Leftrightarrow I = \frac{1}{4}$$

Und somit

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^5}{4}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi dr = \int_0^1\frac{r^5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi dr$$

Abermals partiell integrieren

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{\uparrow}{\cos\varphi}\underset{\downarrow}{\sin\varphi}\,d\varphi = \sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi = 1-J \Leftrightarrow J = \frac{1}{2}$$

also bleibt

$$\frac{1}{8}\int_0^1 r^5\,dr = \frac{1}{48}r^6\Big|_0^1 = \frac{1}{48}.$$

7. Der gesuchte Fluss ist **(7 P)**

$$\Phi_{\mathcal{K}} = \iint_{\mathcal{K}}\langle\vec{n}_{\mathcal{K}}, G\rangle\,d\sigma$$

Bitte wenden!

wobei $\vec{n}_{\mathcal{K}}$ der nach aussen gerichtete Normalenvektor auf der halben Sphäre ist. Bezeichnen wir mit

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

die obere Halbkugel, so können wir den Satz von Gauss wie folgt anwenden:

$$\iiint\limits_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G \, d^3x = \iint\limits_{\partial\mathcal{B}} \langle \vec{n}, G \rangle \, d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{K}} \langle \vec{n}_{\mathcal{K}}, G \rangle \, d\sigma + \iint\limits_{\mathcal{H}} \langle -\vec{e}_z, G \rangle \, d\sigma$$

wobei

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\operatorname{div} G = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = 1 + 2 + 0 = 3$$

ist

$$\iiint\limits_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G \, d^3x = 3\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3} = 2\pi.$$

Weiter ist

$$\langle \vec{e}_z, G \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\rangle = y^2.$$

In Polarkoordinaten, $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

findet man

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{H}} \langle \vec{e}_z, G \rangle \, d\sigma = \iint\limits_{\mathcal{H}} y^2 \, dx \, dy &= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^3 \sin\varphi \, d\varphi \, dr \\ &= \int\limits_0^1 r^3 \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1 - \cos(2\varphi) \right) d\varphi) \, dr \\ &= \int\limits_0^1 r^3 \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) dr \\ &= \pi \int\limits_0^1 r^3 \, dr \\ &= \pi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Und somit errechnet sich der gesuchte Fluss aus

$$\iint\limits_{\mathcal{K}} \langle \vec{n}_{\mathcal{K}}, G\rangle \, d\sigma = \iiint\limits_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G \, d^3x - \iint\limits_{\mathcal{H}} \langle -\vec{e}_z, G\rangle \, d\sigma = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

8. **a)** F ist ein Potentialfeld, wenn ein Potential V existiert, so dass $F = \operatorname{grad} V$. Ein Potential kann wie folgt bestimmt werden: **(11 P)**

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sin(x^2) xz e^{xyz} \quad \Rightarrow \quad V(x,y,z) = \sin(x^2) e^{xyz} + C(x,z)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \sin(x^2) xy e^{xyz} \stackrel{!}{=} \sin(x^2) xy e^{xyz} + \frac{\partial C}{\partial z}(x,z)$$

$$\Rightarrow \quad C(x,z) = C(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2x\cos(x^2) e^{xyz} + \sin(x^2) yz e^{xyz} + \frac{\partial C}{\partial x} \stackrel{!}{=} g(x,y,z)$$

$$\Rightarrow \quad g(x,y,z) = e^{xyz}(2x\cos(x^2) + yz\sin(x^2)) \quad \text{und} \quad C(x) = C$$

Es gilt $F = \operatorname{grad} V$ für $V(x,y,z) = \sin(x^2) e^{xyz} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) **i)** Eine mögliche Parametrisierung der Schnittellipse ist

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

und mit

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix}, \quad F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ -\sin t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die Arbeit entlang von γ

$$\begin{aligned} A &= \int_\gamma F \, ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ -\sin t \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t - \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \cos t \Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

ii) Paramterisiert man die Schnittellipse

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto a(u, v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ 2u\sin v \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \le u \le t \\ 0 \le v \le 2\pi \end{matrix}$$

so findet man

$$a_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2\sin v \end{pmatrix}, \quad a_v = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 2u\cos v \end{pmatrix}$$

und somit einen Normalenvektor

$$(a_u \times a_v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u(\sin^2 v + \cos^2 v) \\ u(\sin^2 v + \cos^2 v) = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u \\ u \end{pmatrix}.$$

Die Rotation von F ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3y \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} F(a(u, v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sin v \end{pmatrix}$$

und damit folgt mit dem Satz von Stokes für die Arbeit

$$A = \oint_\gamma F\, ds = \iint_E \langle (a_u \times a_v), \operatorname{rot} F(a(u, v)) \rangle \, dv\, du$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -2u \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3u\sin v \end{pmatrix} dv\, du = 0$$