Musterlösung zur Prüfung

1. **a)** Sei $z = re^{i\varphi}$ und es ist $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ und $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$, somit gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2z^2(1-i)}{\sqrt{2}e^{i\pi/3}}\right| = \left|\frac{2z^2e^{-i\pi/4}}{e^{i\pi/3}}\right| = 2|z|^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad |z| = 2 \\
\arg\left(\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right) = \arg\left(\frac{re^{i\varphi}}{2e^{-i\pi/6}}\right) = \arg\left(\frac{r}{2}e^{i(\varphi+\pi/6)}\right) = \frac{5\pi}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \\
z = 2e^{i3\pi/2} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 2i \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 0 \\
& \quad\quad\quad\quad \mathrm{Im}(z) = -2
\end{aligned}$$

b) Sei $z = re^{i\varphi}$. Mit $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ und $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ ist

$$\left(\frac{2z}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}\right)^3 = \left(\frac{re^{i\varphi}}{\sqrt{3}e^{i\pi/6}}\right)^3 = \frac{r^3e^{3i\varphi}}{3\sqrt{3}e^{i\pi/2}} = 3\sqrt{\frac{3}{2}}(1+i) = 3\sqrt{3}e^{i\pi/4}$$

$$r^3e^{3i\varphi} = 27e^{i(\pi/4+\pi/2)} = 27e^{i3\pi/4}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
r^3 = 27 \quad &\Leftrightarrow \quad r = |z| = 3 \\
3\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k = 0, 1, 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \\
& \quad\quad\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi = \frac{11}{12}\pi \\
& \quad\quad\quad \varphi_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi = \frac{19}{12}\pi.
\end{aligned}$$

(8 P)

Bitte wenden!

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{(\ln(2-x))^2}{1-e^{x-1}+\ln(x)} &\overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{2\ln(2-x)}{2-x}}{-e^{x-1}+\frac{1}{x}}\\
&\overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2+2\ln(2-x)}{(2-x)^2}}{-e^{x-1}-\frac{1}{x^2}}\\
&= \frac{2}{-2}\\
&= -1.
\end{aligned}$$

(3 P)

3. Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_1^e x(\ln x)^2\,dx &= \frac{x^2}{2}(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e x\ln x\,dx\\
&= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right)\\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e\\
&= \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(4 P)

4. Die homogene Gleichung lautet

$$\dot{x}_h(t) = \frac{dx}{dt} = -tx(t)$$

und somit

$$\int \frac{dx}{x} = -\int t\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \ln x = -\frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\Rightarrow\quad x_h(t) = e^{-t^2/2+c} = Ce^{-t^2/2}.$$

Der inhomogene Ansatz sei

$$x_i(t) = C(t)e^{-t^2/2}.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\qquad \dot{x}_i(t) &= \dot{C}(t)e^{-t^2/2} - C(t)te^{-t^2/2}\\
&= -tx_i(t) + t^2e^{-t^2}\\
&= -tC(t)e^{-t^2/2} + t^2e^{-t^2/2} \quad\Leftrightarrow\quad \dot{C}(t)e^{-t^2/2} = t^2e^{-t^2/2}\\
\Rightarrow\qquad C(t) &= \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\\
\Rightarrow\qquad x_i(t) &= \frac{t^3}{3}e^{-t^2/2}
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) = \left(C + \frac{t^3}{3}\right) e^{-t^2/2}.$$

Mit

$$x(0) = \left(C + \frac{0^3}{3}\right) e^0 = C \stackrel{!}{=} 2$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = \left(2 + \frac{t^3}{3}\right) e^{-t^2/2}.$$

(8 P)

5. Gesucht ist eine Funktion $x : U \subset \mathbb{R} \to V \subset \mathbb{R}$, so dass

$$(1, x(1)) = (1, 2), \qquad (e, x(e)) = (e, 3), \quad \dot{x}(t) = \frac{C}{2}\frac{1}{tx(t)}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{C}{2}\frac{1}{tx} \quad \Leftrightarrow \quad 2\int x\,dx = C\int \frac{dt}{t} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = C\ln(t) + D$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \pm\sqrt{C\ln(t) + D}.$$

$$x(1) = 2 = \sqrt{C\ln(1) + D} = \sqrt{D} \quad \Leftrightarrow \quad D = 4$$

$$x(e) = 3 = \sqrt{C\ln(e) + 4} = \sqrt{C + 4} \quad \Leftrightarrow \quad C = 5.$$

Die gesuchte Funktion ist somit

$$x(t) = \sqrt{5\ln(t) + 4}.$$

(6 P)

6. a) i)

$$\frac{d}{dt}\cosh(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t).$$

ii)

$$\begin{aligned}
1 + \sinh^2(t) &= 1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= 1 + \left(\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= \cosh^2(t).
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

iii)

$$2\sinh(t)\cosh(t) = 2\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t}) = \sinh(2t).$$

b) Die Länge des Kurvenbogens ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt}\cosh(t)\right)^2}\, dt &\overset{i)}{=} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2(t)}\, dt \\
&\overset{ii)}{=} \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2(t)}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} \cosh(t)\, dt \\
&= \sinh(t)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \sinh(1) - \sinh(-1) \\
&= 2\sinh(1).
\end{aligned}$$

c) Das Taylorpolynom $n-$ten Grades einer Funktion $f(t)$ mit Zentrum t^* ist gegeben durch

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t^*)}{k!}(t - t^*)^k.$$

Somit ergibt sich im Falle

$$f(t) = \cosh(t)\sinh(t) \overset{iii)}{=} \frac{\sinh(2t)}{2}$$

mit

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1, \quad \sinh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(t^*) &= \frac{\sinh(2t^*)}{2} \\
f^{(1)}(t^*) &= \cosh(2t^*) \\
f^{(2)}(t^*) &= 2\sinh(2t^*) \\
f^{(3)}(t^*) &= 4\cosh(2t^*)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

für das Taylorpolynom 3. Grades mit Zentrum $t^* = 0$

$$\begin{aligned}
P_3(t) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(t^*)}{k!}(t-t^*)^k \\
&= \frac{\sinh(2t^*)}{2} + \cosh(2t^*)(t-t^*) + \frac{2\sinh(2t^*)}{2!}(t-t^*)^2 + \frac{4\cosh(2t^*)}{3!}(t-t^*)^3 \\
&= \frac{\sinh(0)}{2} + \cosh(0)t + \frac{2\sinh(0)}{2}t^2 + \frac{4\cosh(0)}{6}t^3 \\
&= t + \frac{2}{3}t^3.
\end{aligned}$$

(14 P)

7. a) Der Satz von Gauss besagt

$$\Phi_{\partial Q} = \iint\limits_{\partial Q} \langle \vec{n}, F \rangle \, d\sigma = \iiint\limits_{Q} \operatorname{div} F(x,y,z) \, dx \, dy \, dz.$$

Mit

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2x^2 z - 2y.$$

ist

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{0}\int_{-1}^{1} \left(2x^2 z - 2y\right) \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{0} \frac{2}{3}x^3 z - 2xy \Big|_{-1}^{1} \, dy \, dz \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{0} \left(\frac{4}{3}z - 4y\right) \, dy \, dz \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3}yz - 2y^2 \Big|_{-2}^{0} \, dz \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{8}{3}z + 8 \, dz \\
&= \frac{4}{3}z^2 + 8z \Big|_{-1}^{1} \\
&= 16.
\end{aligned}$$

b) Parametrisierung der Seitenfläche S:

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \mapsto a(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad -1 \le u \le 1, \quad -1 \le v \le 1.$$

Bitte wenden!

Normalenvektor in Richtung der positiven y-Achse:

$$\vec{n} = a_v \times a_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Fluss von F durch die Seitenfläche S

$$\begin{aligned}
\Phi_S &= \iint\limits_S \langle F(a(u,v)), \vec{n} \rangle \, du \, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} F(u,0,v) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, du \, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} -v^2 \\ u^2 + 2v^2 \\ 1 + u^2 v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, du \, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (u^2 + 2v^2) \, du \, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3} u^3 + 2uv^2 \right) \Big|_{-1}^{1} \, du \, dv \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3} + 4v^2 \right) \, dv \\
&= \left(\frac{2}{3} v + \frac{4}{3} v^3 \right) \Big|_{-1}^{1} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

c)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -4z \\ -2xz^2 - 2z \\ 2x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4xz - 2 \\ -6 \\ -2z^2 \end{pmatrix}.$$

(14 P)

8. a) i) Mit der Parametrisierung der Schnittellipse Γ

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 2 + \sin(t) \\ 2 + \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

und mit

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad g(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} (2 + \sin(t))^2 \\ -8 - 4\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

ergibt sich für die Arbeit

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\gamma g\,ds = \int_0^{2\pi} g(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (2+\sin(t))^2 \\ -8-4\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} -4\sin(t) - 4\sin^2(t) - \sin^3(t) - 8\cos(t) - 4\cos^2(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} -4 - 4\sin(t) - 8\cos(t) - \sin^3(t)\,dt \\
&= -4t + \frac{19}{4}\cos(t) - \frac{1}{12}\cos(3t) - 8\sin(t)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -8\pi.
\end{aligned}
$$

ii) Mit der Parametrisierung

$$
a(r,t) = \begin{pmatrix} 2 + r\cos(t) \\ 2 + r\sin(t) \\ 2 + r\sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1
$$

der von Γ umschlossenen Fläche und mit

$$
a_r = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad a_t = \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix}
$$

$$
a_r \times a_t = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(t)\cos(t) - r\sin(t)\cos(t) \\ -r\sin^2(t) - r\cos^2(t) \\ r\cos^2(t) + r\sin^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix}
$$

$$
\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4-2y \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot}(g(a(r,t))) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8-2r\sin(t) \end{pmatrix}
$$

Bitte wenden!

folgt mit dem Satz von Stokes für die Arbeit

$$
\begin{aligned}
A = \int_\gamma g\,ds &= \iint\limits_K \langle a_r \times a_t, \operatorname{rot}(g(a(r,t)))\rangle\,dr\,dt \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8-2r\sin(t) \end{pmatrix} dt\,dr \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} -8r - 2r^2\sin(t)\,dt\,dr \\
&= \int\limits_0^1 -8rt + 2r^2\cos(t)\Big|_0^{2\pi}\,dr \\
&= \int\limits_0^1 -16\pi r\,dr \\
&= -\frac{16\pi}{2}r^2\Big|_0^1 \\
&= -8\pi.
\end{aligned}
$$

b) i) Es ist

$$
h(t) = g(f(t)) = g(\sqrt{1+t^2}, e^{t^2}, t\ln(t)) = \begin{pmatrix} e^{2t^2} \\ -4\sqrt{1+t^2} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

und somit

$$
dh(t) = \begin{pmatrix} 4te^{2t^2} \\ -\frac{4t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

ii)

$$
df(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 2te^{t^2} \\ \ln(t)+1 \end{pmatrix}, \quad dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad dg(f(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{t^2} & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \quad dh(t) = dg(f(t))df(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{t^2} & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 2te^{t^2} \\ \ln(t)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^{2t^2} \\ -\frac{4t}{\sqrt{1+t^2}} \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

(18 P)

Siehe nächstes Blatt!

9. **a)** Der Definitionsbereich der Funktion $f(x,y,z) = x^2 \ln y + \dfrac{y}{z} \ln z$ ist

$$\mathbb{D}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_{>0}, z \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

und der Gradient

$$\bigtriangledown f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \ln y \\ \frac{x^2}{y} + \frac{\ln z}{z} \\ \frac{y - y \ln z}{z^2} \end{pmatrix}.$$

Eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f in $P(1,1,1)$ ist

$$T_P : \left\langle \bigtriangledown f(1,1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \right\rangle = y + z - 2 = 0.$$

b) Mit

$$\vec{e} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ist die Richtungsableitung von f im Punkt $P(1,1,1)$ in Richtung $(3,0,4)^T$

$$D_{\vec{e}} f(1,1,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{5}.$$

Im Punkt $P(1,1,1)$ wird sie maximal in Richtung des Gradienten

$$\bigtriangledown f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der Maximalwert ist gleich dem Betrag des Gradienten an dieser Stelle:

$$|\bigtriangledown f(1,1,1)| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

c) Wegen

$$\bigtriangledown f(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \cdot \ln(1) \\ \frac{0}{1} + \frac{\ln(1)}{1} \\ \frac{1 - 1 \cdot \ln 1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

ist $Q(0,1,1)$ kein kritischer Punkt von f. **(11 P)**