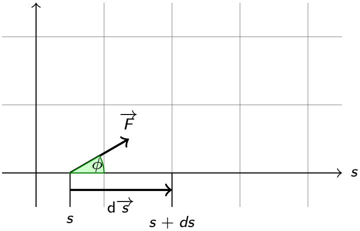
Mathematik II
Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 11: Linien- oder Kurvenintegrale

Ein einführendes Beispiel

Wir führen den Begriff eines *Linien-* oder *Kurvenintegrals* in anschaulicher Weise am Beispiel der *physikalischen Arbeit* ein, die von einer *Kraft* bzw. *Kraftfeld* beim verschieben eines Massenpunktes verrichtet wird.

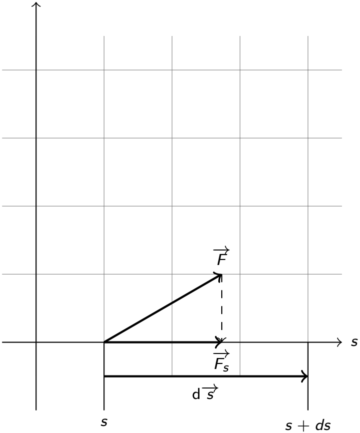


Verschiebung längs einer Geraden durch eine konstante Kraft

Der Massenpunkt wird durch eine *konstante* Kraft $\vec{F}$ längs einer *Geraden* um den Vektor $\vec{s}$ verschoben. Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäss das *skalare Produkt* aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem verschiebungsvektor $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\phi)$$

Ein einführendes Beispiel

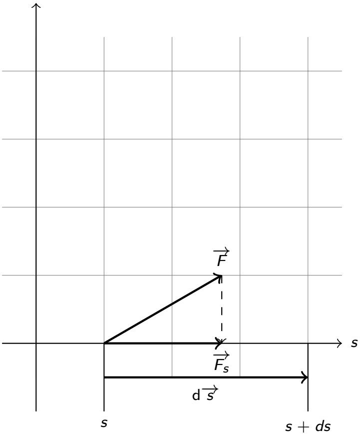


Verschiebung längs einer Geraden durch eine ortsabhängige Kraft

Die auf den Massenpunkt einwirkende Kraft ist jetzt von Ort zu Ort *verschieden:* $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_s}$. Wir zerlegen das *geradlinige* Wegstück in eine grosse Anzahl von sehr kleinen *Wegelementen*, längs eines jeden Wegelementes darf dann die einwirkende Kraft als *nahezu konstant* betrachtet werden. Die bei einer *infinitesimal kleinen* Verschiebung das Massenpunktes um $d\overrightarrow{s}$ verrichtete Arbeit beträgt dann definitiongemäss

$$dW = \overrightarrow{F}(s) \cdot d\overrightarrow{s} = F_s(s)ds$$

Ein einführendes Beispiel



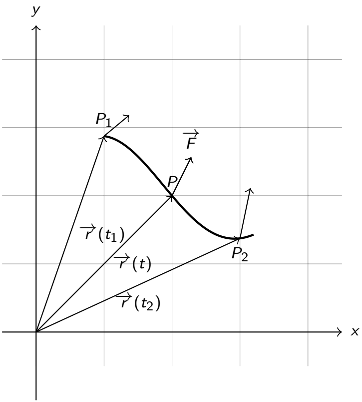
Verschiebung längs einer Geraden durch eine ortsabhängige Kraft

$\overrightarrow{F_s}(s)$ ist dabei die *Kraftkomponente in Wegrichtung*. Durch *Integration* erhalten wir die insgesamt von der Kraft $\overrightarrow{F}(s)$ längs des Weges von s_1 nach s_2 geleistete Arbeit.

Sie führt uns zu dem *Arbeitsintegral*

$$W = \int_{s_1}^{s_2} dW = \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{F}(s) \cdot d\overrightarrow{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s)ds$$

Ein einführendes Beispiel

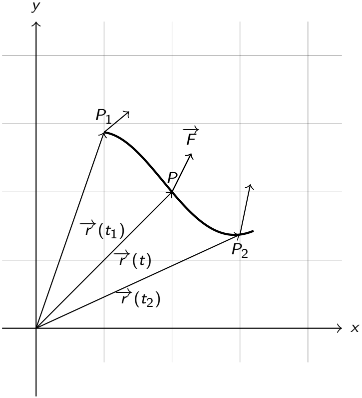


Allgemeiner Fall: Verschiebung längs einer Kurve in einem Kraftfeld

In einem *ebenen Kraftfeld* $\vec{F}(x;y)$ soll ein Massenpunkt vom Punkt P_1 aus längs einer Kurve C mit dem Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ in den Punkt P_2 verschoben werden $(t_1 \leq t \leq t_2)$.
Beim Verschieben des Massenpunktes von P aus um ein *infinitesimal kleines* Wegelement $d\vec{r}$ in den Punkt Q verrichtet das Kraftfeld die Arbeit

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} F_x(x;y) \\ F_y(x;y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= F_x(x;y)dx + F_y(x;y)dy \end{aligned}$$

Ein einführendes Beispiel



Allgemeiner Fall: Verschiebung längs einer Kurve in einem Kraftfeld

Die bei einer Verschiebung auf der Kurve C von P_1 nach P_2 *insgesamt* vom Kraftfeld aufzubringende Arbeit erhalten wir durch *Integration*:

$$\begin{aligned} W &= \int_C dW \\ &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (F_x(x;y)dx + F_y(x;y)dy) \end{aligned}$$

Ein einführendes Beispiel

- Für die Koordinaten x und y setzt man die Parametergleichungen $x(t)$ bzw. $y(t)$ der Integrationskurve C ein.
- Die längs dieses Weges wirkende Kraft hängt dann nur noch vom *Kurvenparameter* t ab.
- Das Wegelement $d\vec{r}$ ersetzen wir noch durch den Tangentenvektor $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ und das Differential dt des Parameters t.
- Es gilt

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{und somit} \quad d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\,dt = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt$$

Ein einführendes Beispiel

Das *Arbeitsintegral (Linienintegral)* $\int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ geht schliesslich mit Hilfe dieser Substitution in ein *gewöhnliches* Integral über :

$$\begin{aligned} W &= \int\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2} (\overrightarrow{F} \cdot \dot{\overrightarrow{r}})dt \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} (F_x(x(t); y(t))\dot{x}(t) + F_y(x(t); y(t))\dot{y}(t))dt \end{aligned}$$

Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals

Definition

$\vec{F}(x; y; z)$ sei ein raümliches Vektorfeld, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ der Ortsvektor einer von P_1 nach P_2 verlaufenden Raumkurve C mit $t_1 \leq t \leq t_2$ und $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$ der zugehörige Tangentenvektor der Kurve.

Dann heisst das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

das *Linien-* oder *Kurvenintegral* des Vektorfeldes $\vec{F}(x; y; z)$ längs der Raumkurve C.

Anmerkung

- Das *Linien-* oder *Kurvenintegral* lautet in ausführlicher Schreibweise:

$$\int_C [F_x(x; y; z)dx + F_y(x; y; z)dy + F_z(x; y; z)dz] = \int_{t_1}^{t_2} [F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}]\, dt$$

Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals

- Man beachte, dass der Wert eines Linien- oder Kurvenintegrals i.a. nicht nur vom *Anfangs*- und *Endpunkt*- des Integrationsweges, sondern auch noch vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg abhängt.
- Wird der Integrationsweg C in der *umgekehrten* Richtung durchlaufen (symbolische Schreibweise: $-C$), so tritt im Integral ein *Vorzeichenwechsel* ein:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Für ein Kurvenintegral längs einer *geschlossenen* Linie C verwenden wir das Symbol

$$\oint_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

  Ein solches Kurvenintegral wird in den physikalish-technischen Anwendungen auch als *Zirkulation* des Vektorfeldes $\vec{F}$ längs der *geschlossenen* Kurve C bezeichnet.

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Die *Berechnung* $\int(\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})dt$ erfolgt in *zwei* Schritten:

1. - Zunächst werden in dem Feldvektor $\vec{F}(x;y;z) = \begin{pmatrix} F_x(x;y;z) \\ F_y(x;y;z) \\ F_z(x;y;z) \end{pmatrix}$ die Koordinaten x, y, z der Reihe nach durch die *parameterabhängigen* Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ der Raumkurve C ersetzt.
   - Der Feldvektor und seine Komponenten hängen dann nur noch vom Parameter t ab.
   - Dann *differenziert* man den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ nach dem Parameter t, erhält den Tangentenvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ und bildet das *skalare Produkt* aus Feld- und Tangentenvektor.
2. Das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$ hängt jetzt nur noch vom *Parameter* t ab, ist also eine *Funktion* von t und wird nach dieser Variablen in den Grenzen von t_1 bis t_2 *integriert*.

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Beispiel

- Wir berechnen das *Linienintegral* $\int_C (y \cdot e^x + e^x dy)$ längs des *parabelförmigen* Verbindungsweges C: $x = t$, $y = t^2$ der beiden Punkte $O = (0;0)$ und $P = (1;1)$.
- Längs dieses Weges gilt $(0 \leq t \leq 1)$:

$$\begin{array}{lll} x = t & \dot{x} = 1 & dx = dt \\ y = t^2 & \dot{y} = 2t & dy = 2t\ dt. \end{array}$$

- Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in das Linienintegral erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \int_C (y \cdot e^x dx + e^x dy) &= \int_0^1 (t^2 \cdot e^t dt + e^t \cdot 2t\ dt) \\ &= \left[(t^2 - 2t + 2) \cdot e^t\right]_0^1 + 2\left[(t-1) \cdot e^t\right]_0^1 \\ &= e - 2 + 2(0+1) \\ &= e. \end{aligned}$$

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Beispiel

- Welchen Wert besitzt das *Linienintegral* des raümlichen Vektorfeldes $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ x^2yz \\ x + z \end{pmatrix}$ längs der Kurve C, die durch den Ortsvektor $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 1$ beschrieben wird?

Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Lösung:

- Es gilt

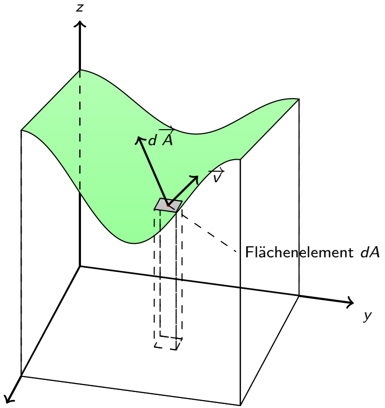
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2t + t^4 \\ t^5 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} &= (2t + t^4) \cdot 1 + t^5 \cdot 2t + 2t \cdot 1 \\ &= 2t^6 + t^4 + 4t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt &= \int_0^1 (2t^6 + t^4 + 4t) dt \\ &= \left[\frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 + 2t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{87}{35} \end{aligned}$$

Oberflächenintegrale: Ein einführendes Beispiel

- Wir gehen von einer Flussigkeitsströmung aus, deren Geschwindigkeit $\vec{v}$ sich von Ort zu Ort *verändert*: $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$.
  Wir ermitteln den Fluss durch eine beliebig *gekrümmte* Fläche A, die wir in das Strömungsfeld eingebracht haben.



Oberflächenintegrale: Ein einführendes Beispiel

- Der Flüssigkeitsfluss durch ein solches Flächenelement dA ist dann wiederum durch das *skalare Produkt*

$$\overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{A} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N})dA$$

  gegeben.
- Der *Gesamtfluss* durch die Fläche A wird bestimmt, indem wir über die Beiträge aller in der Fläche gelegenen Flächenelemente *summieren*, d.h *integrieren*.
- Die in der Zeitenheit durch die Fläche A strömende Flussigkeitsmenge ist somit das Integral

$$\iint\limits_{(A)} \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{A} = \iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N})dA$$

Definition eines Oberflächenintegrals

Wir interessieren uns für den " Fluss" eines Vektorfeldes $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x; y; z)$ durch eine orientierte Fläche A im Raum, wobei wir schrittweise wie folgt vorgehen wollen:

- Zunächst wird die Fläche A in eine sehr grosse Anzahl n von Teilflächen $\Delta A_1, \Delta A_2, .., \Delta A_n$ zerlegt.
- Jede Teilfläche kann dabei als *nahezu eben* betrachtet und somit durch ein *vektorielles* Flächenelement beschrieben werden.
- Der k-ten Teilfläche ΔA_k entspricht also das *vektorielle* Flächenelement $\Delta\overrightarrow{A_k}$ mit $|\Delta\overrightarrow{A_k}| = \Delta A_k$.

Definition eines Oberflächenintegrals

- Sei $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ ein beliebig gewählter Punkt auf ΔA_k.
  Der *Fluss* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ durch die Teilfläche ΔA_k ist dann

$$\overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{A_k}$$

- Ist $\overrightarrow{N_k}$ die Flächennormale im Flächenpunkt P_k, so können wir dafür auch schreiben:

$$(\overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{N_k})\Delta A_k$$

- Durch Summierung über alle Teilflächen erhalten wir für den gesuchten *Gesamtfluss* den folgenden *Näherungswert*:

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{A_k} = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta\overrightarrow{N_k})\Delta A_k$$

Definition eines Oberflächenintegrals

Definition

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta A_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta \overrightarrow{A_k}$$

wird (falls er *vorhanden* ist) als *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x_k; y_k; z_k)$ über die *orientierte* Fläche A bezeichnet und durch das Symbol

$$\iint_{(A)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iint_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$$

gekennzeichnet.

Definition eines Oberflächenintegrals

Anmerkungen

- Die *Orientierung* der Fläche ist durch die Flächennormale $\overrightarrow{N}$ *eindeutig* festgestelt. Bei einer *geschlossenen* Fläche, z.B der Oberfläche einer Kugel, eines Zylinder, oder eines Quaders, zeigt dabei $\overrightarrow{N}$ vereinbarungsgemäss nach aussen.
- Das Oberflächenintegral über eine *geschlossene* Fläche A wird durch das Symbol

$$\underset{(A)}{\oiint} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \underset{(A)}{\oiint} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$$

gekennzeichnet.
- Mit $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{N}$ erhalten wir $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} = 1$ und

$$\underset{(A)}{\oiint} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = A$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

Verwendung symmetriegerechter Koordinaten

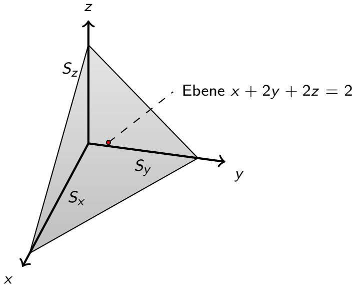
Die *Berechnung* eines Oberflächenintegrals $\iint\limits_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$ erfolgt in *vier* Schritten:

1. Zunächst werden *geeignete* Koordinaten ausgewählt, die sich der Symmetrie des problem in *optimaler* Weise anpassen.
   Zur Auswahl stehen dabei *Kartesische* Koordinaten (x, y, z), *Zylinderkoordinaten* (ρ, ϕ, z), *Kugelkoordinaten* (r, ν, ϕ).
2. Man bestimme dann die *Flächennormale* $\vec{N}$, berechne anschliessend das *Skalarprodukt* $\vec{F} \cdot \vec{N}$ und drücke dieses sowie das Flächenelement dA durch die gewählten Koordinaten aus.
3. Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
4. Berechnung des Doppelintegrals in der bekannten Weise.

Berechnung eines Oberflächenintegrals

Beispiel

- Wie gross ist der *Fluss* des Vektorfeldes $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix}$ durch die im *ersten* Oktant gelegene Fläche der Ebene $x + 2y + 2z = 2$, die wir *grau* unterlegt haben?



Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Die Ebene mit der Gleichung $x + 2y + 2z = 2$ können wir als eine *Niveaufläche* des skalaren Feldes $\phi(x; y; z) = x + 2y + 2z$ auffassen.
- Dabei steht der Gradient dieses Feldes, d.h. der Vektor

$$\text{grad}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  überall senkrecht auf dieser Ebene.
- Durch *Normierung* erhalten wir daraus dann die benötigte *Flächennormale* $\overrightarrow{N}$:

$$\overrightarrow{N} = \frac{1}{|\text{grad}(\phi)|}\text{grad}(\phi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Wir bestimmen das *Skalarprodukt* $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}$:

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(6z - 6y + 6) = 2(z - y + 1)$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Da wir x als y *unabhängige* Variable ansehen wollen, müssen wir noch z durch diese Variablen ausdrücken.

  Dies geschieht, indem wir die Gleichung der Ebene nach z auflösen:

$$z = \frac{1}{2}(2 - x - 2y)$$

- Diesen Ausdruck setzen wir dann in das Skalarprodukt $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}$ ein:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} &= 2(z - y + 1) = 2\left[\frac{1}{2}(2 - x - 2y) - y + 1\right] \\ &= -x - 4y + 4 \end{aligned}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Jetzt müssen wir noch mit dem in der Fläche (Ebene) liegenden *Flächenelement* dA beschäftigen und versuchen dieses durch die unabhängigen kartesischen Koordinaten auszudrücken.
- Die *Projektion* des Flächenelementes dA in die (x, y)-Ebene ergibt ein infinitesimales Rechteck mit dem Flächeninhalt $dA^* = dx\ dy$.
- Andererseits ist diese Projektion aber das *skalare Produkt* aus dem vektoriellen Flächenelement $d\overrightarrow{A} = dA\ \overrightarrow{N}$ und dem Einheitsvektor $\overrightarrow{e_z}$ in Richtung der positiven z-Achse.
- Somit gilt:

$$\begin{aligned} dA^* &= d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{e_z} \\ &= dA(\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_z}) \\ &= dy\ dx \end{aligned}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Mit

$$\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{e_z} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}$$

folgt dann:

$$dA \cdot \frac{2}{3} = dy \;\, dx \quad \text{oder} \quad dA = \frac{3}{2} dy \;\, dx$$

Damit haben wir das Flächenelement dA in *kartesischen* Koordinaten ausgedrückt.

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Die *Schnittkurve* der Fläche $x + 2y + 2z = 2$ mit der x, y-Ebene $z = 0$ lautet dabei:

$$x + 2y = 2 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

- Somit ergeben sich die folgenden *Integrationsgrenzen*:

y-Integration: Von $y = 0$ bis $y = -\frac{1}{2}x + 1$
x-Integration: Von $x = 0$ bis $x = 2$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- Das Flussintegral (Oberflächenintegral) $\iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$ lässt sich dann wie folgt durch ein *Doppelintegral* in kartesischen Koordinaten darstellen:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA &= \iint\limits_{(A^*)} (-x - 4y + 4) \cdot \frac{3}{2} dy\ dx \\ &= \frac{3}{2} \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} (-x - 4y + 4) \cdot \frac{3}{2} dy\ dx\end{aligned}$$

Berechnung eines Oberflächenintegrals

- *Innere Integration (nach der Variablen y)*;

$$\int_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} (-x-4y+4)\cdot\frac{3}{2}dy\ dx = \left[-xy-2y^2+4y\right]_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} = -x+2$$

- *Äussere Integration (nach der Variablen x)*;

$$\int_{x=0}^{2} (-x+2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2 = -2+4=2$$

- Unser *Oberflächenintegral* besitzt damit den folgenden Wert:

$$\iint_{(A)} (\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N})dA = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Ist die vom Vektorfeld $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ "durchflutete" Fläche A in der *vektoriellen Form (Parameterform)*

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} x(u; v) \\ y(u; v) \\ z(u; v) \end{pmatrix}$$

gegeben, so geht man bei der Berechnung des Oberflächenintegrals $\iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$ wie folgt vor:

- das Vektorfeld $\vec{F}$ wird zunächst in den *Flächenparametern* u und v ausgedrückt:

$$\vec{F}(x; y; z) \to \vec{F}(u; v)$$

- Für die *Flächennormale* $\vec{N}$ und das Flächenelement dA verwenden wir die folgenden Ausdrücke:

$$\vec{N} = \frac{\vec{t_u} \times \vec{t_v}}{|\vec{t_u} \times \vec{t_v}|}, \quad dA = |\vec{t_u} \times \vec{t_v}| du\, dv$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern

Die von einem Vektorfeld $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x; y; z)$ "durchflutete" Fläche A sei durch einen von den beiden *Parametern* u und v abhängigen Ortsvektor $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u; v)$ gegeben.

Dann besitzt das Oberflächenintegral $\iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA$ die folgende Gestalt:

$$\iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA = \iint\limits_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{t_u} \times \overrightarrow{t_v}) du\, dv$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Die Integralberechnung erfolgt dabei in *vier* Schritten:

- Das Vektorfeld $\vec{F}$ wird zunächst durch die *Flächenparameter* u und v ausgedrückt:

$$\vec{F}(x; y; z) \to \vec{F} = \vec{F}(u; v)$$

- Man bilde dann die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Fläche, also die Vektoren

$$\vec{t_u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \vec{t_v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

  und bestimme anschliessend mit ihnen das *gemischte* Produkt (*Spatprodukt*)

$$\vec{F} \cdot (\vec{t_u} \times \vec{t_v})$$

- Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
- *Berechnung* des Doppelintegrals in der bekannten Weise

Oberflächenintegral in Flächenparametern

Beispiel

- Wir berechnen den *Fluss* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$ durch die Mantelfläche A eines Zylinder.
  Diesmal gehen wir jedoch von dem *parameterabhängigen* Ortsvektor

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(\phi; z) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(\phi) \\ 5 \cdot \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \phi < 2\pi; 0 \leq z \leq 10)$$

  der Mantelfläche aus.

Oberflächenintegral in Flächenparametern

- Als *Flächenparameter* dienen dabei die beiden *Zylinderkoordinaten* ϕ und z.
- Zunächst drücken wir das gegebene Vektorfeld mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= 5 \cdot \cos(\phi) \\ y &= 5 \cdot \sin(\phi) \\ z &= z \end{aligned}$$

wie folgt durch die *Flächenparameter* ϕ und z aus:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(\phi; z) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin(\phi) \\ 5 \cdot \cos(\phi) \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

- Als nächstes bestimmen wir die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Zylinderfläche (ϕ- und z-Linien) und deren *Vektorprodukt*:

$$\overrightarrow{t_\phi} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -5 \cdot \sin(\phi) \\ 5 \cdot \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{t_z} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{t_\phi} \times \overrightarrow{t_z} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(\phi) \\ 5 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Damit erhalten wir für das benögtige *Spatprodukt* $\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{t_\phi} \times \overrightarrow{t_z})$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{t_\phi} \times \overrightarrow{t_z}) &= \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin(\phi) \\ 5 \cdot \cos(\phi) \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(\phi) \\ 5 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 50 \cdot \sin(\phi)\cos(\phi) \\ &= 25 \cdot \sin(2\phi) \end{aligned}$$

Oberflächenintegral in Flächenparametern

- Unser Flussintegral lautet damit:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot (\vec{t_\phi} \cdot \vec{t_z}))\ d\phi\ dz \\ &= \iint\limits_{(A)} 25 \cdot \sin(2\phi) d\phi\ dz \\ &= 25 \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{10} \sin(2\phi) d\phi\ dz\end{aligned}$$

Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche

Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche

Der Fluss eines *homogenen Vektorfeldes* $\vec{F} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{const}$ durch die Oberfläche eines Würfels ist gleich *Null*.
Diese Aussage gilt auch für eine beliebige *geschlossene* Oberfläche A:

$$\oiint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 0$$