Mathematik II
Frühjahrssemester 2013

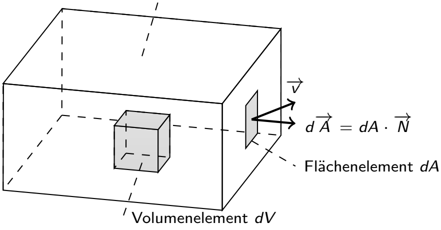
Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 12: Integralsätze von Gauss und Stokes

Ein einführendes Beispiel

- Eine Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$ durchströme den dargestellten *quaderförmigen* Bereich vom Volumen V.
- Durch das *grau* unterlegte Flächenelement dA der Quaderoberfläche fliesst dann die folgende Flüssigkeitsmenge (Flüssigkeitsvolumen):

$$(\vec{v} \cdot \vec{N})dA = \vec{v} \cdot \vec{dA}$$



Flüssigkeitsströmung
durch einen quaderförmigen Bereich

- Dabei ist $\vec{N}$ die *Flächennormale* und $d\vec{A} = dA\ \vec{N}$ das *vektorielle* Flächenelement.
- Der Gesamtfluss durch die *geschlossene* Hülle A (Oberfläche des Quaders) pro Zeiteinheit ist somit durch das *Oberflächenintegral*

$$\underset{(A)}{\oiint}(\vec{v} \cdot \vec{N})dA = \underset{(A)}{\oiint} \vec{v} \cdot \vec{dA}$$

gegeben.

Ein einführendes Beispiel

- Nun beschäftigen wir uns mit der Flüssigkeitsmenge, die in dem Quaderförmigen Bereich durch die dortigen *Quellen* und *Senken* der Flüssigkeit in der Zeiteinheit " erzeugt " bzw. " vernichtet " wird.
- Wir betrachten ein Volumenelement dV im Innern des Quaders.
- In ihm wird - wie wir bereits im Zusammenhang mit dem Begriff der *Divergenz* eines Vektorfeldes erkannt haben - pro Zeitenheit die Flüssigkeitsmenge

$$\mathrm{div}(\vec{v})\ dV$$

"erzeugt" oder "vernichtet", je nachdem, ob sich dort eine Quelle *oder* Senke befindet.
- Somit wird *insgesamt* im Quadervolumen V pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}(\vec{v})\ dV$$

"erzeugt" oder "vernichtet".

Ein einführendes Beispiel

- Diese Menge muss aber bei einer Flüssigkeit mit *konstanter* Dichte in der Zeiteinheit durch die Quaderoberfläche A hindurchfliessen.
- Mit anderen Worten:

  die in der Zeiteinheit im Quadervolumen V “erzeugte” bzw. “vernichtete” Flussigkeitsmenge $\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(\vec{v})\, dV$ muss dem Gesamtfluss $\oiint\limits_{(A)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$ durch die Quaderoberfläche entsprechen.
- Somit gilt:

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(\vec{v})\, dV = \oiint\limits_{(A)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Gauss-scher Integralsatz im Raum

Gauss-scher Integralsatz im Raum

Das *Oberflächintegral* eines Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ über eine *geschlossene* Fläche A ist gleich dem *Volumenintegral* der Divergenz von $\overrightarrow{F}$, erstreckt über das von der Fläche A eingeschlossene *Volumen* V:

$$\begin{aligned}\oiint_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA &= \oiint_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dA}) \\ &= \iiint_{(V)} div(\overrightarrow{F})\, dV\end{aligned}$$

Dabei bedeuten:

$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x;y;z)$:	Stetig differenzierbares Vektorfeld
A :	*Geschlossene* Fläche (Oberfläche), die das Volumen V einschliesst
V:	*Raümlicher* Bereich (Volumen) mit der geschlossenen Oberfläche A
$\overrightarrow{N}$:	Nach aussen gerichtete Flächennormale

Gauss-scher Integralsatz im Raum

Anmerkungen

- Mit Hilfe des *Gauss-schen Integralsatzes* lässt sich ein Volumenintegral über die *Divergenz* eines Vektorfeldes in ein *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes über die (geschlossene) Oberfläche dieses Volumens *umwandeln* und umgekehrt.
- Im "Strömungsmodell" hat das Vektorfeld $\vec{F}$ die Bedeutung des *Geschwindigskeitsfeldes* einer strömenden Flüssigkeit, und die durch den *Gaussschen Integralsatz* miteinander verknüpften Oberflächen- und Volumenintegrale haben dann die folgende anschauliche Bedeutung:

$\oiint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$: Flüssigskeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch die *geschlossene* Hülle A fliesst

$\iiint\limits_{(V)} div(\vec{F})\, dV$: Im Gesamtvolumen V in der Zeiteinheit " erzeugte " bzw. "vernichtete" Flüssigkeitsmenge

Gauss-scher Integralsatz im Raum

Beispiel

- Mit Hilfe des *Gauss-schen Integralsatzes* soll der Fluß des Vektorfeldes $\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche eines *Zylinders* mit dem Radius $R = 2$ und der Höhe $H = 5$ berechnet werden. Es gilt:

$$\oiint_{(A)} (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) dA \quad = \quad \iiint_{(V)} div(\overrightarrow{F}) \; dV$$

(A: Zylinderoberfläche; V : Zylindervolumen).

- Die Berechnung des Flusses erfolgt hier über das *Volumenintegral* der rechten Seite.

  Dazu benötigen wir zunächst die Divergenz des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$:

$$\begin{aligned} div(\overrightarrow{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) \\ &= 3x^2 - 1 + 1 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Gauss-scher Integralsatz im Raum

Beispiel

- Somit ist

$$\iiint_{(V)} div(\overrightarrow{F})\ dV \quad = \quad 3 \cdot \iiint_{(V)} x^2\ dV$$

- Um dieses Volumenintegral zu berechnen, führen wir zweckmässigerweise *Zylinderkoordinaten* ein:

$$x = \rho \cdot \cos(\phi), \quad y = \rho \cdot \sin(\phi), \quad z = z, \quad dV = \rho\ dz\ d\rho\ d\phi$$

Die *Integrationsgrenzen* des Volumensintegrals (Dreifachintegrals) lauten dann:

$$\begin{array}{ll} z\text{-}\mathit{Integration}: & \text{Von } z = 0 \text{ bis } z = 5 \\ \rho\text{-}\mathit{Integration}: & \text{Von } \rho = 0 \text{ bis } \rho = 2 \\ \phi\text{-}\mathit{Integration}: & \text{Von } \phi = 0 \text{ bis } \phi = 2\pi \end{array}$$

Gauss-scher Integralsatz im Raum

- Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{(V)} div(\overrightarrow{F})\ dV &= 3 \iiint\limits_{(V)} x^2\ dV \\
&= 3 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{5} (\rho \cdot \cos(\phi))^2 \cdot \rho\ dz\ d\rho\ d\phi \\
&= 3 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \cos(\phi)^2 \int\limits_{\rho=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{5} \rho^3\ dz\ d\rho\ d\phi
\end{aligned}$$

Gauss-scher Integralsatz im Raum

- $$\begin{aligned}\iiint\limits_{(V)} div(\overrightarrow{F})\, dV &= 3 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} 5\cos(\phi)^2 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{2} d\phi \\ &= 60 \cdot \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\cos(2\phi)+1}{2} d\phi \\ &= 60 \cdot \left[\frac{\sin(2\phi)/2+\phi}{2}\right]_{\phi=0}^{2\pi} \\ &= 60\pi\end{aligned}$$

Gauss-scher Integralsatz in der Ebene

Gauss-scher Integralsatz in der Ebene

$$\oint_C (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}) ds = \iint_{(A)} div(\overrightarrow{F}) \, dA$$

Dabei bedeuten:

$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x; y)$:	Stetig differenzierbares *ebenes* Vektorfeld
A:	*Ebenes* Flächenstück
C:	*Geschlossene* und *orientierte* Randkurve der Fläche A
$\overrightarrow{N}$:	Nach *aussen* gerichtete Kurvennormale
ds:	Linienelement der Randkurve C

Gauss-scher Integralsatz in der Ebene

Beispiel

- Wir "verifizieren" den *Gauss-schen Integralsatz* in der Ebene für das Vektorfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und die Kreisfläche A mit dem Radius $R = 2$.
- **Berechnung des Kurvenintegrals** $\oint\limits_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds$

  Integriert wird über die Normalkomponente des Vektorfeldes $\vec{F}$ längs der geschlossenen Kreislinie C mit dem Radius $R = 2$ um den Nullpunkt. Die *Kurvennormale* $\vec{N}$ zeigt dabei verabredungsgemäss radial nach aussen. Somit gilt:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Für die *Normalkomponente* von $\vec{F}$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{N} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Gauss-scher Integralsatz in der Ebene

- Längs des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ besitzt sie den *konstanten* Wert

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = 2$$

Das *Kurvenintegral* hat daher den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} \, ds &= 2 \oint_C ds \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

- **Berechnung des Doppelintegrals** $\iint\limits_{(A)}$ **div** $\vec{F} \, dA$

Integrationsbereich ist die Kreisfläche A. Mit

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \iint\limits_{(A)} \operatorname{div} (\vec{F}) dA &= \iint\limits_{(A)} 2dA \\ &= 2 \cdot 4\pi \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

Stokes-scher Integralsatz

Stokes-scher Integralsatz

Das Kurven- oder *Linienintegral* eines Vektorfeldes $\vec{F}$ längs einer einfach *geschlossenen* Kurve C ist gleich dem *Oberflächenintegral* der Rotation von $\vec{F}$ über eine beliebige Fläche A, die durch die Kurve C *berandet* wird:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dA$$

Dabei bedeuten:

$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$:	Stetig differenzierbares Vektorfeld
A:	Fläche mit der Randkurve C
$\vec{N}$:	Flächennormale
C:	*Orientierte* Randkurve der Fläche A, wobei die positive Umlaufsrichtung wie folgt festgelegt wird: ein Beobachter, der in die Richtung der Flächennormale $\vec{N}$ schaut, durchläuft die Randkurve C dabei so, dass die Fläche *links* liegen bleibt.

Stokes-scher Integralsatz

Anmerkung

- Der *Wirbelfluss* durch eine *geschlossene* Fläche A (d.h durch die Oberfläche eines raümlichen Bereiches) ist gleich *Null*:

$$\iint\limits_{(A)} \operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{A} = \iint\limits_{(A)} \operatorname{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{N}\, dA = 0$$

  Begründung: die Randkurve C der *geschlossenen* Fläche A ist auf einen *Punkt* zusammengezogen, das Linienintegral $\oint\limits_{(C)} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ *verschwindet* somit.

- Der *Wirbelfluss* eines Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ ist für *alle* Flächen A, die von der gleichen Kurven C berandet werden, *gleich gross*, d.h. *völlig unabhängig* von der Gestalt der Fläche.

Stokes-scher Integralsatz

Beispiele

Die folgenden Flächen besitzen jeweils die *gleiche* Randkurve C:

- A_1 : Mantelfläche der *Halbkugel*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$$

- A_2 : Mantelfläche der *Rotationsparaboloids*

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$$

- A_3 : *Kreisfläche*

$$x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$$

Die *Randkurve* ist in allen drei Fällen der *Ursprungskreis* mit dem Radius $R = 1$.

Der *Wirbelfluss* eines beliebigen (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes $\vec{F}$ durch die drei Flächen ist daher nach dem Stokes-schen Integralsatz *gleich gross*.

Stokes-scher Integralsatz

Beispiel

Wir “verifizieren” den *Stokes-schen Integralsatz* für das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$$

und die Mantelfläche A der *Halbkugel* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

- **Berechnung des Kurvenintegrals** $\oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$

  Die Mantelfläche der Halbkugel wird in der x, y-Ebene durch den *Einheitskreis* C mit der Parameterdarstellung

  $$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = 0, \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

  berandet.

Stokes-scher Integralsatz

- Mit

$$\dot{x}(t) = -\sin(t), \quad \dot{y}(t) = \cos(t), \quad \dot{z}(t) = 0, \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

und somit

$$dx = -\sin(t)dt, \quad dy = \cos(t)dt, \quad dz = 0, \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

erhalten wir für das *skalare Produkt* $\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\
&= (x^2 + y^2)dx + ydy + z^2 dz \\
&= (\cos^2(t) + \sin^2(t))(-\sin(t))dt + \sin(t) \cdot \cos(t)dt \\
&= -\sin(t)dt + \sin(t) \cdot \cos(t)dt
\end{aligned}$$

Stokes-scher Integralsatz

- Das Kurvenintegral besitzt damit den Wert *Null*:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin(t) + \sin(t) \cdot \cos(t))dt$$

$$= \left[\cos(t) + \frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

Stokes-scher Integralsatz

Berechnung des "Wirbelflusses" $\underset{(A)}{\iint}(\mathbf{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot d\overrightarrow{A})$

- Wir bestimmen zunächst die *Rotation* des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ mit Hilfe der "Determinantendarstellung":

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_x & \overrightarrow{e}_y & \overrightarrow{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y^2 & y & z^2 \end{vmatrix} \\ &= 0\overrightarrow{e}_x - 0\overrightarrow{e}_y - 2y\overrightarrow{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir benötigen noch die *Flächennormale* $\overrightarrow{N}$.

Stokes-scher Integralsatz

- Da die Oberfläche der Halbkugel als eine *Niveaufläche* der skalaren Funktion $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ aufgefasst werden kann, steht der Gradient von ϕ *senkrecht* auf dieser Fläche:

$$\operatorname{grad}(\phi) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Durch *Normierung* des Gradienten erhalten wir die *Flachennormale* $\overrightarrow{N}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \frac{1}{|\operatorname{grad}(\phi)|}\operatorname{grad}(\phi) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (unter Berücksichtigung von } x^2 + y^2 + z^2 = 1). \end{aligned}$$

Stokes-scher Integralsatz

- Die im Oberflächenintegral auftretende *Normalkomponente* von $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F})$ lautet damit:

$$(\mathrm{rot}(\overrightarrow{F})) \cdot \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2yz$$

Wir gehen jetzt zweckmässigerweise zu *Kugelkoordinaten* über.
Kugelkoordinaten lauten (für $r = 1$):

$$x = \sin(\zeta) \cdot \cos(\psi), \quad y = \sin(\zeta) \cdot \sin(\psi), \quad x = \cos(\zeta)$$

Damit wird

$$\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{N} = -2yz = -2 \cdot \sin(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \cdot \sin(\psi)$$

Das benötigte *Flächenelement dA* auf der Kugeloberfläche lautet für $r = 1$:

$$dA = \sin(\zeta)\ d\zeta\ d\psi$$

Stokes'scher Integralsatz

- Das Integrationsgrenzen des Doppelintegrals sind dabei:
  ζ-Integration: von $\zeta = 0$ bis $\zeta = \pi/2$
  ψ-Integration: von $\psi = 0$ bis $\psi = 2\pi$

  Wir sind jetzt in der Lage, den *Wirbelfluss* zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{(A)} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\; dA &= \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi/2} (-2 \cdot \sin(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \cdot \sin(\psi) \cdot \sin(\zeta)\; d\zeta\; d\psi) \\
&= -2 \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\zeta=0}^{\pi/2} (\sin^2(\zeta) \cdot \cos(\zeta) \cdot \sin(\psi)\; d\zeta\; d\psi) \\
&= -2 \int_{\psi=0}^{2\pi} (\sin(\psi) d\psi) \cdot \int_{\zeta=0}^{\pi/2} (\sin^2(\zeta) \cos(\zeta)\; d\zeta)
\end{aligned}$$

Stokes-scher Integralsatz

- $$\begin{aligned} \iint\limits_{(A)} \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{N}\ dA &= -2\,[-\cos(\psi)]_{\psi=0}^{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{3}\sin^3(\zeta)\right]_{\psi=0}^{\pi/2} \\ &= -2 \cdot (0) \cdot (\frac{1}{3}) = 0 \end{aligned}$$

  Damit haben wir den *Stokes-schen Integralsatz* verifiziert.
  In diesem Beispiel gilt also:

  $$\oint\limits_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_{(A)} \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{N}\ dA = 0$$