Mathematik II
Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 7: Lineare Algebra
7.4 Lineare Gleichungssysteme

Allgemeine Vorbetrachtungen

Ein *lineares Gleichungssystem* mit *m* Gleichungen und *n* Unbekannten vom Typ

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

(als *lineares* (m,n)-*System* bezeichnet) lässt sich unter Verwendung von *Matrizen* in einer besonders übersichtlichen Form darstellen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

wobei **x** als *Lösungsvektor* bezeichnet wird.
Matrizenschreibweise für das lineare (m, n)-System:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$$

Allgemeine Vorbetrachtungen

Anmerkungen

- Das lineare Gleichungssystem heisst *homogen*, wenn $\mathbf{c} = 0$ ist. Ein *inhomogenes* System liegt vor, wenn $\mathbf{c} \neq 0$ ist.
- Für $m = n$ liegt der in den Anwendungen besonders wichtige *Sonderfall* eines *quadratischen* linearen (n, n) Gleichungssystem vor.
- Bei späteren Untersuchungen über das *Lösungsverhalten* eines linearen Gleichungssystem spielt die sog. Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

eine bedeutende Rolle.

Allgemeine Vorbetrachtungen

Beispiel

- Das lineare $(2,3)$-System

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \end{array}$$

lautet in der *Matrizenform*:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Vorbetrachtungen

Beispiel

- Das in der *Matrizenform* vorliegende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lautet in der herkömmlichen Schreibweise, auch *Komponentenschreibweise* genannt, wie folgt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

Die Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

Man kann ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mit Hilfe des *Gauss-schen Algorithmus* lösen. Wir erinnern an die folgende Aussage über das *Lösungsverhalten* eines solchen Gleichungssystems.

Zur Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

1. **Inhomogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$**
   Das System besitzt entweder genau *eine* Lösung, *unendlich* viele Lösungen oder überhaupt *keine* Lösung.
2. **Homogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$**
   Das System besitzt entweder genau eine Lösung, nämlich die *triviale* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, oder *unendlich* viele Lösungen (darunter die triviale Lösung).

Über die Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

Eine Entscheidung jedoch darüber, ob ein vorgegebenes lineares (m, n)-System überhaupt *lösbar* ist, und ob das System dann *eine* Lösung oder gar *unendlich* viele Lösungen besitzt, konnte dabei erst im Verlaufe der Rechnung getroffen werden.
Häufig interessieren in den Anwendungen weniger die Lösungen an sich als das *Lösungsverhalten* des linearen Systems.
Wir werden uns daher vorrangig mit den folgenden Problemstellungen befassen:

1. Unter *welchen* Voraussetzungen ist ein lineares Gleichungssystem überhaupt *lösbar*?
2. *Wann* besitzt ein lineares Gleichungssystem genau *eine* Lösung, *wann* dagegen *unendlich* viele Lösungen?

Gauss-scher Algorithmus

Der *Gauss-sche Algorithmus* ist ein in der Praxis weit verbreitetes Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem. Er beruht auf *äquivalenten Umformungen* des linearen Systems, die wir im folgenden nochmals einzeln aufführen:

1. Zwei Gleichungen dürfen miteinander *vertauscht* werden.
2. Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden.
3. Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Gleichung *addiert* werden.

Mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* lässt sich dann ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ in ein *äquivalentes gestaffeltes* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ überführen, aus dem dann (im Falle der *Lösbarkeit* des Systems) die unbekannten Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sukzessiv* berechnet werden können.

Gauss-scher Algorithmus

Wir wählen das lineare $(3, 3)$-System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & = & -28 \end{array}$$

aus und unterwerfen dieses System der Reihe nach den folgenden *äquivalenten Umformungen (Gauss-scher Algorithmus)*:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 & \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -14 & \quad (-2 \cdot E_1) \\ & - & 3x_2 & + & 12x_3 & = & -42 & \quad (-2 \cdot E_1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 & \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -14 & \\ & & & & 0x_3 & = & 0 & \quad (-3 \cdot E_2) \end{array}$$

Gauss-scher Algorithmus

Wir haben damit das Gleichungssystem in das *gestaffelte* System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -14 \\ & & & & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

übergeführt, das nun *sukzessiv* von unten nach oben gelöst werden kann. Die letzte Gleichung $0x_3 = 0$ ist dabei für jedes $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllt, d.h. die Unbekannte x_3 ist als *frei wählbarer Parameter* zu betrachten (wir setzen $x_3 = \lambda$).
Das lineare Gleichungssystem besitzt somit *unendlich* viele (noch von einem Parameter λ) abhängige Lösungen, die in der folgenden Form darstellbar sind:

$$\begin{array}{rcc} x_1 & = & -6\lambda - 21 \\ x_2 & = & 4\lambda + 14 \\ x_3 & = & \lambda \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6\lambda - 21 \\ 4\lambda + 14 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Gauss-scher Algorithmus

Bei den beschriebenen äquivalenten Umformungen des System wurde sowohl die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ als auch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ in eine jeweils *ranggleiche* Matrix mit *trapezförmiger* Gestalt übergeführt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rg(\mathbf{A}) = Rg(\mathbf{A}^*) = 2$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array}\right) \Rightarrow (\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$Rg(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = Rg(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = 2$$

Lösungsverhalten eines (m, n)-Gleichungssystems

Lösen eines linearen Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mit Hilfe des Gauss-schen Algorithmus

Den *äquivalenten Umformungen* eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ entsprechen *elementare Zeilenumformungen* in der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$. Im Falle der *Lösbarkeit* des linearen Systems lassen sich die Lösungen wie folgt gewinnen:

1. Zunächst wird die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ (und damit auch die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ selbst) mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* in eine *ranggleiche* Matrix mit *Trapezform* übergeführt:

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^* \qquad \text{und} \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$$

2. Das lineare Gleichungssystem liegt dann in der *gestaffelten* Form $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ vor und lässt sich *sukzessiv* von unten nach oben lösen.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Wir untersuchen in diesem Abschnitt das *Lösungsverhalten* eines linearen (m, n)-Systems vom allgemeinen Typ $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$
in der Komponentenschreibweise

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}$$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* lässt sich dieses System in ein *äquivalentes gestaffeltes* System der Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}^*x_1 & + & a_{12}^*x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}^*x_r & + & a_{1,r+1}^*x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{1n}^*x_n & = & c_1^* \\
 & & a_{22}^*x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}^*x_r & + & a_{2,r+1}^*x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{2n}^*x_n & = & c_2^* \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{rr}^*x_r & + & a_{r,r+1}^*x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{rn}^*x_n & = & c_r^* \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & c_{r+1}^* \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & c_m^*
\end{array}$$

überführen ($a_{ii}^* \neq 0,\ i = 1, 2, ..., r$).

Unter Verwendung von *Matrizen* lässt sich dafür auch schreiben $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Der Übergang vom linearen System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ zum *äquivalenten* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ können wir *symbolisch* wie folgt darstellen:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c} \xrightarrow[\text{Umformungen}]{\text{Äquivalente}} \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}^*$ geht dabei aus der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ aus der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ durch *elementare Zeilenumformungen* hervor:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{Zeilenumformungen}]{\text{Elementare}} \left\{\begin{matrix} \mathbf{A}^* \\ (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) \end{matrix}\right.$$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

$$
(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1r}^* & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & c_1^* \\
0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2r}^* & a_{2,r+1}^* & \cdots & a_{2n}^* & c_2^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{rr}^* & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn} & c_r^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1}^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+2}^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m^*
\end{array}\right)
$$

Das lineare (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ ist offensichtlich nür *lösbar*, wenn die Elemente c_{r+1}^*, c_{r+2}^*, ..., c_m^* *sämtlich verschwinden*.

Anderfalls erhalten wir *widersprüchliche* Gleichungen, in denen die *linke* Seite den Wert Null und die *rechte* Seite einen von Null *verschiedenen* Wert besitzt.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ muss daher im Falle der *Lösbarkeit* die spezielle Form

$$(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1r}^* & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & c_1^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2r}^* & a_{2,r+1}^* & \cdots & a_{2n}^* & c_2^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^* & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn} & c_r^* \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

annehmen.
Beide Matrizen, sowohl $\mathbf{A}^*$ als auch $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$, sind dann von *trapezförmiger* Gestalt und enthlalten jeweils in der letzten $m - r$ Zeilen nur *Nullen*. Sie stimmen daher in ihrem *Rang* überein:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = r$$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Da das system System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ durch *äquivalente Umformungen* bzw. *elementare Zeilenumformungen* aus dem System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ hervorgeht, sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^*$ bzw. $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ und $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ jeweils *ranggleich*.
Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ist demnach nur *lösbar*, wenn $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ vom *gleichen rang* sind.
Die Bedingung $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$ ist somit *notwendig und hinreichend* für die Lösbarkeit eines linearen Systems.

Über die lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems

Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ist dann und nur dann *lösbar*, wenn der Rang der Koeffizienmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Rang der *erweiteten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ *übereinstimmt*:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$$

$(r \leq m; \ r \leq n)$

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems

Anmerkungen

- Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ist *unlösbar*, wenn $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ ist. In diesem Fall ist stets $\text{Rg}(\mathbf{A}) < \text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$.
- In einem *homogenen* linearen (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, ist die *Lösbarkeitsbedingung*, $\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$ *stets* erfüllt.
  Dies weil die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ unterscheidet sich von der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ lediglich durch eine *zusätliche* Spalte mit lauter *Nullen*, die aber den Matrizenrang in *keiner* Weise verändert.

Fallunterscheidung bei einem lösbaren linearen System

Im Falle der *Lösbarkeit* eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ müssen wir noch die Fälle $r = n$ und $r < n$ unterscheiden.

Fall: $r = n$

Das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ besitzt für $r = n$ die *quadratische* Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}^* x_1 & + & a_{12}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\ & & a_{22}^* x_2 & + & \cdots & & a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}^* x_n & = & c_n^* \end{array}$$

Fallunterscheidung bei einem lösbaren linearen System

Fall: $r = n$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}^*$ ist eine (obere) *Dreiecksmatrix*, die *erweitete* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ besitzt *Trapezform*.

$$(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* & c_1^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* & c_2^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* & c_n^* \end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt genau *eine* Lösung, die man *sukzessiv* von unter nach oben aus dem *gestaffelten* System berechnet.

Fallunterscheidung bei einem lösbaren linearen System

Fall: $r < n$

Das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ besitzt für $r < n$ die *quadratische* Form

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_{11}^* x_1 & + & a_{12}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}^* x_r & + & a_{1,r+1}^* x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\
 & & a_{22}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}^* x_r & + & a_{2,r+1}^* x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{rr}^* x_r & + & a_{r,r+1}^* x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{rn}^* x_n & = & c_r^*
\end{array}$$

Wir haben in diesem Fall mehr Unbekannte (n) als Gleichungen (r): $n > r$:
daher sind $n - r$ der Unbekannten, z.B $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ *frei wählbare Gröss en (Parameter)*.
Das gestaffelte System wird dann wiederum *sukzessiv* von unten nach oben gelöst.
Wir erhalten *unendlich* viele Lösungen, die noch von $n - r$ Parametern abhängen.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

1. Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ist nur *lösbar*, wenn Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ *ranggleich* sind:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$$

2. Im Falle der *Lösbarkeit* besitzt das lineare System die folgende *Lösungsmenge*:
   Für $r = n$: Genau *eine* Lösung
   Für $r < n$: Unendlich viele Lösungen, wobei $n - r$ der insgesamt n Unbekannten *frei wählbare Parameter* sind.

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$: Kriterien

Lineares (m, n)-System
$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

$Rg(\mathbf{A}) = Rg(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$

$r = n$: genau eine Lösung

$r < n$: unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern

$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$

Keine Lösung

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Beispiel

Wir zeigen mit Hilfe von *Determinanten*, dass das lineare $(3, 2)$-System

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & 2 \\ -x_1 & + & 5x_2 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \end{array}$$

nicht lösbar ist. Der Rang der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt $\text{Rg}(\mathbf{A}) = 2$, da es wenigstens *eine* von Null verschiedene 2-*reihige* Unterdeterminante, nämlich

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0 \quad \text{gibt.}$$

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

ist *quadratisch* und sogar *regulär*:

$$\det(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -26 \neq 0.$$

Somit ist $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$. Das vorliegende Gleichungssystem ist daher *unlösbar*.

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Beispiel

Wir untersuchen mit Hilfe der *Matrizenrechnung* das Lösungsverhalten des folgenden $(4, 3)$-Systems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems wird zunächst den folgenden *elementaren Zeilenumformungen* unterworfen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} := Z_2 \\ := Z_1 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4Z_1 \\ +Z_1 \\ -3Z_1 \end{array}$$

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2Z_2 \\ -Z_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :14 \\ :3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +Z_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$$

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = 3$$

Das lineare Gleichungssystem ist somit wegen $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$ *lösbar* und besitzt genau *eine* Lösung, da $r = n = 3$ ist.

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Die Lösung berechnen wir aus dem gestaffelten System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ *sukzessiv*:

- *Gestaffeltes System:*

$$\begin{array}{rrrrrcrcrcrl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 & \Rightarrow & x_1 & = & 2 & \uparrow \\ & - & x_2 & - & 9x_3 & = & 6 & \Rightarrow & x_2 & = & 3 & \uparrow \\ & & & - & x_3 & = & 1 & \Rightarrow & x_3 & = & -1 & \end{array}$$

- *Lösung:* $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$

Quadratische lineare Gleichungssysteme: Lösungsverhalten

Für $m = n$, erhalten wir in den Anwendungen besonders häufigen und wichtigen *Sonderfall* eines *quadratischen* linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist dabei *quadratisch*, die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ vom Typ $(n, n+1)$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_n \end{array} \right)$$

Inhomogenes lineares (n, n)-System

- Nach den Ausführungen über die linearen (m, n)-Systeme, ist ein inhomogenes lineares (n, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ nur *lösbar*, wenn

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$$

  ist.

- Ein lineares (n, n)-System besitzt dabei genau *eine* Lösung, wenn $r = n$ und somit $\mathbf{A}$ eine *reguläre* Matrix ist. Dies ist es für $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ der Fall. Ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ dagegen *singulär*, d.h. ist $\det(\mathbf{A}) = 0$, so erhalten wir entweder unendlich viele Lösungen, falls

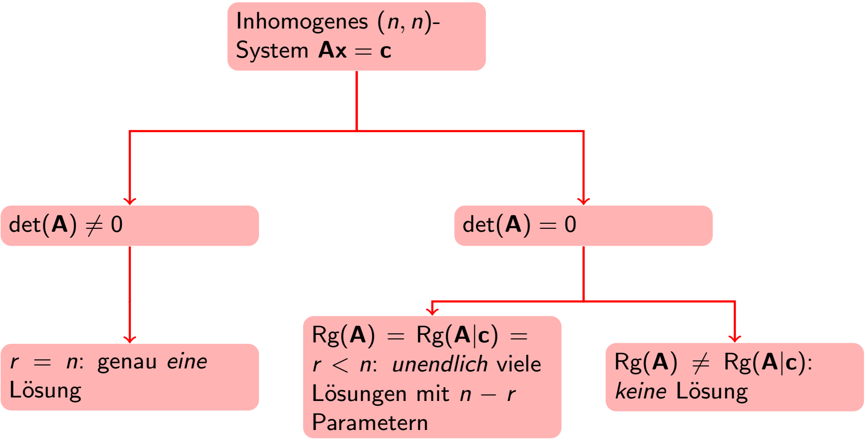
$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r < n$$

  ist, oder überhaupt keine Lösung, wenn nämlich

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$$

  ist.

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems



Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ des *inhomogenes* linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist *regulär:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Das lineare (3-3)-System besitzt demnach genau *eine* Lösung, die wir mit Hilfe das *Gauss-schen Algorithmus* bestimmen.
Das *gestaffelte* System lautet damit:

$$\begin{array}{rrrrrrrcrcl} -x & - & y & - & 3z & = & -5 & \Rightarrow & x & = & 6 \\ & & y & - & 4z & = & -8 & \Rightarrow & y & = & -4 \uparrow \\ & & & & 4z & = & 4 & \Rightarrow & z & = & 1 \uparrow \end{array}$$

Es wird durch $x = 6$, $y = -4$, $z = 1$ gelöst.

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Wir zeigen mit Hilfe von *Determinanten*, dass das *inhomogene* lineare $(3, 3)$-System

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

nicht *lösbar* ist.

Zunächst einmal ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ wegen

$$\det(\mathbf{A}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

singulär. Daher ist ihr Rang *kleiner* als 3: $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) < 3$.

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt den Rang $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$, da es *eine* von Null verschiedene *3-reihige* Unterdeterminante von $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ gibt, nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -21 \neq 0.$$

Somit ist $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$, d.h. das vorliegende (3,3)-System ist *unlösbar*.

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Wir bestimmen die Lösungsmenge des *inhomogenen* linearen $(4, 4)$-Systems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 5 \end{array}$$

mit Hilfe der *Matrizenrechnung*.

In der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ werden die folgenden *elementaren Zeilenumformungen* vergenommen:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -Z_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^*|c^*)$$

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3 = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$$

Die *erweiterte* Koeffizienten hat jetzt die gewünschte *Trapezform*. Wegen $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$ ist das lineare System *lösbar*, besitzt aber *unendlich* viele Lösungen mit *einem* Parameter, da $n - r = 4 - 3 = 1$ ist.

Diese Lösungen bestimmen wir aus dem *gestaffelten* System

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

Wir wählen x_4 als *Parameter*: $x_4 = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Für die übrigen Unbekannten erhalten wir dann *sukzessiv* die folgenden *parameterabhängigen* Werte:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 & \Rightarrow & x_3 & = & \lambda - 4 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 & \Rightarrow & x_2 & = & -\lambda + 2.5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & \Rightarrow & x_1 & = & -3\lambda + 1.5 \end{array}$$

Das lineare System besitzt somit die *unendliche Lösungsmenge*

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & = & -3\lambda + 1.5 \\ x_2 & = & -\lambda + 2.5 \\ x_3 & = & \lambda - 4 \\ x_4 & = & \lambda \end{array}\right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Homogenes lineares (n, n)-System

Ein *homogenes* lineares (n, n)-System von Typ

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{nn}x_n & = & 0
\end{array}$$

ist als *Sonderfall* eines homogenen (m, n)-Systems *stets* lösbar, da die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ *ranggleich* mit der (quadratischen) Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist:

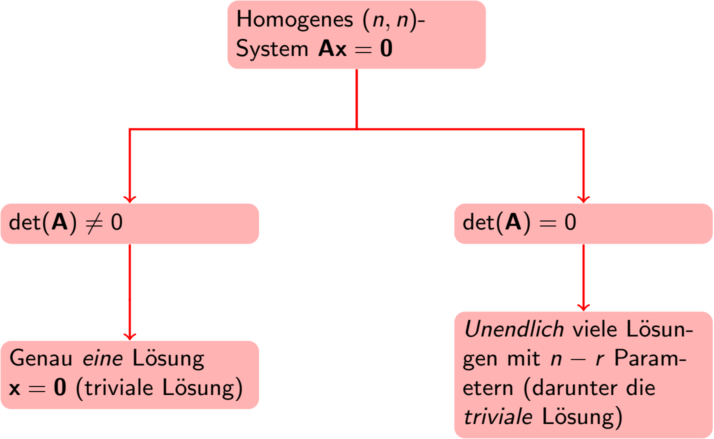
$$\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{0}) = r$$

Homogenes lineares (n, n)-System

Das *homogene* (n, n)-System besitzt dabei genau *eine* Lösung, nämlich die *triviale Lösung* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, oder $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär*, d.h. $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist.

Nicht-triviale Lösungen, d.h. von der trivialen Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *verschiedene* Lösungen, gibt es nur, wenn $\mathbf{A}$ *singulär*, d.h. $\det \mathbf{A} = 0$ ist. In diesem Fall existieren *unendlich* viele Lösungen, die noch $n - r$ Parametern abhängen, wobei r der Rang von $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ ist.

Kriterien für die Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$



Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Wir untersuchen die *Lösungsverhalten* des *homogenen* linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

singulär. Das homogene Gleichungssystem besitzt somit *nicht-triviale* Lösungen.

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Wir überführen nun das homogene System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* in ein *äquivalentes gestaffeltes* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -14 & 7 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :(-7) \\ :6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -Z_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*$$

$$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2$$

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Die Lösungen des vorliegenden homogenen $(3, 3)$-Systems hängen somit noch von *einem* Parameter ab, da $n - r = 3 - 2 = 1$ ist. Wir lösen das *gestaffelte* System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

und erhalten mit dem *Parameter* $x_3 = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ die folgende *unendliche* Lösungsmenge:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0,25\lambda \\ x_2 & = & 0,5\lambda \\ x_3 & = & \lambda \end{array}\right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Besitzt das *homogene* lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht-triviale Lösungen?
Um diese Frage zu beantworten, müssen wir den Wert der Koeffizientendeterminante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

berechnen.

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Dies geschieht wie folgt: zunächst addieren wir zur 4.Spalte die 1.Spalte und zur 2.Spalte das 2-fache der 1.Spalte.
Anschliessend wird die Determinante nach den Elementen der 1.Zeile *entwickelt*.
Wir erhalten dann:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-107) = -107$$

Wegen $\det \mathbf{A} = -107 \neq 0$ ist das vorgegebenene homogene System nur *trivial* lösbar.

$\Longrightarrow$ *Einzige* Lösung ist somit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Cramersche Regel

Ein lineares (n, n)-Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ besitzt genau *eine* Lösung, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär* ist.
Dann existiert auch die zu $\mathbf{A}$ *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ und die Lösung des Systems lässt sich wie folgt berechnen:

$$
\begin{array}{rrl}
 & \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Ax} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\
\Rightarrow & (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})\mathbf{x} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\
\Rightarrow & (\mathbf{E})\mathbf{x} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\
\Rightarrow & \mathbf{x} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}
\end{array}
$$

Wir berechnen nun das Produkt $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}$, wobei wir die Darstellung für $\mathbf{A}^{-1}$ verwenden und erhalten:

$$
\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \quad = \quad \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}
$$

Cramersche Regel

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 A_{11} & + & c_2 A_{21} & + & \cdots & + & c_n A_{n1} \\ c_1 A_{12} & + & c_2 A_{22} & + & \cdots & + & c_n A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ c_1 A_{1n} & + & c_2 A_{2n} & + & \cdots & + & c_n A_{nn} \end{pmatrix}$$

oder in *komponentenweiser* Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \cdots + c_n A_{n1}}{\det \mathbf{A}} \\ x_2 &= \frac{c_1 A_{12} + c_2 A_{22} + \cdots + c_n A_{n2}}{\det \mathbf{A}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{c_1 A_{1n} + c_2 A_{2n} + \cdots + c_n A_{nn}}{\det \mathbf{A}} \end{aligned}$$

Cramersche Regel

Im *Nenner* dieser Formelausdrücke steht die Koeffizientendeterminante $D = \det \mathbf{A}$.
Auch der jeweilige *Zähler* lasst sich durch eine *Determinante* darstellen.
Ersetzen wir in der Koeffizientendeterminante beispielweise die *1. Spalte* durch die Absolutglieder $c_1, c_2, ..., c_n$ des Systems, so erhalten wir die n-reihige Determinante

$$D_1 \quad = \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Durch diese *Entwicklung* von D_1 nach den Elementen der *1. Spalte* folgt weiter:

$$D_1 = c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \cdots + c_n A_{n1}$$

Daher können wir schreiben

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad (D = \det \mathbf{A})$$

Cramersche Regel

Entsprechend erhalten wir für die übrigen Unbekannten $x_2, x_3, .., x_n$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

mit $D_1, D_2, ..., D_n$ der *Hilfsdeterminanten*.

Cramersche Regel

Ein lineares (n, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mit *regulärer* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die *eindeutig* bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Dabei bedeuten:

D : Koeffizientendeterminante ($D = \det \mathbf{A} \neq 0$)

D_i : *Hilfsdeterminante*, die aus D hervorgeht, indem man die *i-te* Spalte durch die Absolutglieder $c_1, c_2, ..., c_n$ ersetzt.

Cramersche Regel

Anmerkungen

- Man beachte: die *Cramersche Regel* darf *nur* angewandt werden, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär* d.h. $D = \det \mathbf{A} \neq 0$ ist.
- Um die Lösung eines (n, n)-Systems nach der *Cramerschen Regel* zu bestimmen müssen insgesamt $n + 1$ Determinanten der Ordnung n berechnet werden, nämlich D, D_1,...,D_n.

  Der Rechenaufwand ist dabei - insbesondere bei Determinanten höherer - Ordnung - erheblich.
  In der Praxis wird man daher die Lösung eines linearen (n, n)-System für $n > 3$ stets mit Hilfe des *Gauss-schen Algorithmus* bestimmen.

Cramersche Regel

Beispiel

Das *inhomogene* lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ -\; x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

besitzt genau *eine* Lösung, da die Koeffizientendeterminante D einen von Null verschiedenen Wert besitzt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$$

Die Lösung bestimmen wir nach der *Cramerschen Regel*. Dazu benögtigen wir noch die folgenden *Hilfsdeterminanten*:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 155$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -62$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt demnach die folgende *Lösung*:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{155}{31} = 5, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-62}{31} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{31} = 0$$

Gauss-Jordan-Verfahren

Berechnung einer inversen Matrix mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen (Gauss - Jordan-Verfahren)

Zu jeder *regulären* n-reihigen Matrix **A** gibt es genau eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, die schrittweise wie folgt berechnet werden kann:

- Zunächst wird aus der **Matrix A** und der n-reihigen Einheitsmatrix **E** die neue Matrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

  vom Typ $(n, 2n)$ gebildet.

Gauss -Jordan-Verfahren

Gauss - Jordan-Verfahren

- Diese Matrix wird nun mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* so umgeformt, dass die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ den ursprünglichen Platz der Matrix $\mathbf{A}$ einnimmt. Die gesuchte *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ befindet sich dann auf dem ursprünglichen Platz der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

mit $(b_{ij}) = \mathbf{A}^{-1}$.

Gauss -Jordan-Verfahren

Beispiel

Wir berechnen die zur *reguläre* 3-reihigen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gehörige inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, diesmal nach dem *Gauss -Jordan-Verfahren*. Die jeweils durchgeführten Operationen schreiben wir dabei *rechts* an die Matrix (Z: Zeile):

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +8Z_1 \\ +2Z_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ := Z_3 \\ := Z_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -4Z_2 \end{array}$$

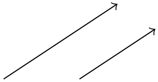
$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{r} +Z_3 \\ +2Z_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

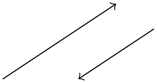
Die zu **A** *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ein einführendes Beispiel



(a) parallele Vektoren



(b) anti-parallele Vektoren

Jeder der beiden Vektoren ist daher als ein bestimmtes *Vielfaches* des anderen Vektors in der Form

$$\mathbf{a} = c_1 \mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = c_2 \mathbf{a}$$

darstellbar.

Im Falle *paralleler* Vektoren sind beide Koeffizienten c_1 und c_2 *positiv*, bei *anti-parallelen* Vektoren beide jedoch *negativ*.

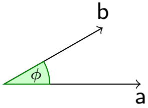
Ein einführendes Beispiel

Wir können den Zusammenhang zwischen den Vektoren **a** und **b** aber auch durch eine *lineare* Vektorgleichung vom Typ

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = 0 \ , \qquad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

ausdrücken.
Zwischen den beiden Vektoren besteht somit eine *lineare Beziehung* oder *lineare Abhängigkeit*. Sie werden daher folgerichtig als *linear abhängige* Vektoren bezeichnet.

Ein einführendes Beispiel

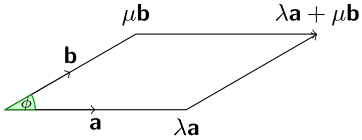


(c) Nicht-kollineare Vektoren

In diesem Fall kann daher *keiner* der beiden Vektoren als Vielfaches des anderen Vektors ausgedrückt werden.
Wir haben es hier mit sog. *linear unabhängigen* Vektoren zu tun. Eine lineare Vektorgleichung der Form

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = 0$$

kann demnach bei *linear unabhängigen* Vektoren nur dann bestehen, wenn $\lambda_1, \lambda_2 = 0$.



(d) Vektor **c** als Linearkombination der Vektoren **a** und **b** darstellbar

Offensichtlich läss t sich in diesem Fall ein *beliebiger* Vektor **c** der Ebene durch eine *Linearkombination* der Vektoren **a** und **b** wie folgt darstellen

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

Die drei Vektoren **a**, **b**, und **c** sind dabei *linear abhängig*, da in

$$\mathbf{0} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

nicht alle Koeffizienten verschwinden.

Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren

Definition

Die n Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ aus dem m-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^m$ heissen *linear unabhängig*, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann.
Verschwinden jedoch *nicht alle* Koeffizienten in dieser Gleichung, so heissen die Vektoren *linear abhängig*.

Anmerkung

- Im Falle der *linearen Abhängigkeit* gibt es also *mindestens einen* von Null verschiedenen Koeffizienten in der Vektorgleichung.

Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren

Beispiel

- Die beiden Basisvektoren $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene sind *linear unabhängig*. Die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{e}_x + \lambda_2 \mathbf{e}_y = \mathbf{0}$$

führt nämlich zu dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren

Beispiel

- Auf einem Massenpunkt greifen gleichzeitig drei Kräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, und $\mathbf{F}_3$ ein. Wir fassen diese Einzelkräfte in der üblichen Weise zu einer *resultierenden* Kraft

$$\mathbf{F}_\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

zusammen. Die vier Kraftvektoren bilden dann in ihrer Gesamtheit ein System aus *linear abängigen* Vektoren, da in der linearen Vektorgleichung

$$0 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_\mathbf{R}$$

sogar *alle vier* Koeffizienten von Null *verschieden* sind.

Linear abhängige Vektoren

Linear abhängige Vektoren

Ein System aus n Vektoren a_1, a_2,...,a_n besitze *mindestens* eine der folgenden drei Eigenschaften:

1. Das Vektorsystem enthält den *Nullvektor*.
2. Das Vektorsystem enthält zwei *gleiche* oder zwei *kollineare* Vektoren.
3. Mindestens einer der n Vektoren ist als Linearkombination der *übrigen* Vektoren darstellbar.

Die Vektoren a_1, a_2,...,a_n sind dann *linear abhängig*.

Linear abhängige Vektoren

Beispiel

- Die aus n Einzelkräften $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...$\mathbf{F}_n$ die alle an einem Massenpunkt angreifen, gebildete *resultierende* Kraft

$$\mathbf{F}_\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

ist eine spezielle *Linearkombination* dieser Kraftvektoren (nämlich die *Vektorsumme*).
Die $(n+1)$-Kräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...$\mathbf{F}_n$ und $\mathbf{F}_\mathbf{R}$ sind daher *linear abhängig*.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ des m-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^m$ können dabei wie folgt als *Spaltenvektoren* einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) aufgefass t werden:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{A} & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
 & & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_n \end{matrix}
\end{array}
$$

Der Spaltenvektor $\mathbf{a}_k$ besitzt also der Reihe nach die Komponenten $a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk}$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Das Matrixelement a_{ik} ist demnach die $i - te$ Komponente des k-ten Spaltenvektors $\mathbf{a}_k$.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Mit diesen Bezeichnungen können wir die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

wie folgt auch als *Matrizengleichung* schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\lambda = \mathbf{0}$$

Es handelt sich hierbei um ein *homogenes lineares Gleichungssystem* mit den n unbekannten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, die wir noch zu dem Spaltenvektor λ zusammengefasst haben.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir wissen bereits, dass dieses System *stets* lösbar ist, wobei allerdings noch *zwei* Fälle zu unterscheiden sind.

- Fall $r = n$
  Es gibt *genau* eine Lösung, $\lambda = \mathbf{0}$.

  $$r = n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$$

  Die n Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ sind daher *linear unabhängig*.

- Fall $r < n$
  Es gibt *unendlich* viele Lösungen für die unbekannten Koeffizienten, d.h. also auch Lösungen, bei denen *nicht alle* λ_i verschwinden:

  $$r < n \quad \Rightarrow \quad \text{nicht alle } \lambda_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

  Die n Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ sind daher *linear abhängig*.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

n Vektoren $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ des m-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^m$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn die aus ihnen gebildete Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n)$ den Rang $r = n$ besitzt.
Sie sind jedoch *linear abhängig*, wenn $r < n$ ist.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Die aus den drei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gebildete Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist *regulär*, da ihre Determinante *nicht verschwindet*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Die Matrix besitzt damit den Rang $r = 3$.

Wegen $r = n = 3$ handelt es sich hier also *linear unabhängige* Vektoren.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Drei Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ des $\mathbb{R}^4$ bilden die folgende $(4, 3)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Um festzustellen, ob sie *linear unabhängig* sind, bestimmen wir zunächst den Rang dieser Matrix mit Hilfe elementarer *Zeilenumformungen*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -Z_1 \\ -Z_1 \\ -Z_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -0.5Z_2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Matrix besitzt jetzt die gewünschte *Trapezform*, für ihren Rang gilt somit $\text{Rg}(\mathbf{A}) = r = 2$.
Wegen $n = 3$ und somit $r < n = 3$ sind die Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, und $\mathbf{a}_3$ *linear unabhängig*.
Zwischen ihnen besteht der folgende Zusammenhang (wie man leicht nachrechnet):

$$\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir können aus dem Kriterium für linear unabhängige Vektoren noch weitere Schlüsse ziehen:

- Sonderfall $m = n$
  - $\mathbf{A}$ ist regulär, d.h. $\det \mathbf{A} \neq 0 \Rightarrow$ *linear unabhängige* Vektoren
  - $\mathbf{A}$ ist singulär, d.h. $\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$ *linear abhängige* Vektoren
- Sonderfall $m < n$
  Die Anzahl n der Vektoren ist *grösser* als die Dimension m des Raumes, aus dem sie stammen. Für der Rang r der Matrix $\mathbf{A}$ gilt dann:

$$\left.\begin{array}{c} r \leq m \\ r \leq n \\ m < n \end{array}\right\} \Rightarrow r \leq m < n \Rightarrow r < n$$

  Der Rang r der Matrix $\mathbf{A}$ ist somit kleiner als die Anzahl n der Vektoren, diese sind daher *linear abhängig*.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

- n Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn die aus diesen Vektoren gebildete n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ *regulär* ist, d.h. $\det \mathbf{A} \neq 0$ gilt:

$$\mathbf{A} \text{ } \textit{regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{linear unabhängige} \text{ Vektoren}$$

- Unter den Vektoren des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ gibt es *maximal* n linear unabhängige Vektoren.
  Mehr als n Vektoren sind stets *linear abhängig*.

Anmerkung

- Der Rang r einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit m Zeilen und n Spalten lässt sich auch wie folgt deuten:
  r ist die *Maximalzahl* linear unabhängiger Zeilen- bzw. *Spaltenvektoren* $(r \leq m,\ r \leq n)$.

Über die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

- Ist $\mathbf{A}$ jedoch *singulär*, d.h. gilt $\det \mathbf{A} = 0$, so sind die Vektoren *linear abhängig*:

$$\mathbf{A} \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \text{linear abhängige Vektoren}$$

  Dies ist der Fall, wenn das Vektorsystem

  - den *Nullvektor* oder zwei *kollineare* Vektoren enthält;
  - einer der Vektoren als *Linearkombination* der übrigen Vektoren darstellbar ist.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Die drei Basisvektoren $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des drei-dimensionalen Anschauungsraumes sind *linear unabhängig*, denn die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

regulär.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Dagegen sind die drei in einer Ebene liegenden Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

linear abhängig.

Begründung: Im $\mathbb{R}^2$ gibt es maximal *zwei* linear unabhängige Vektoren, *mehr als zwei* Vektoren (hier: drei) sind also stets *linear abhängig*.

Anwendungsbeispiel: elektrisches Netzwerk

Das behandelte *elektrische Netzwerk* mit dem ohmschen Widerständen R_1, R_2, und R_3 und einer Spannungsquelle U führte uns zu dem *inhomogenen* linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U \\ & & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \neq 0$$

eine *reguläre* Koeffizientenmatrix **A** und ist somit *eindeutig* lösbar.

Anwendungsbeispiel: elektrisches Netzwerk

Die Teilströme I_1, I_2, und I_3 berechnen wir nach der *Cramerschen Regel* unter Verwendung der drei *Hilfsdeterminanten*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ U & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -(R_2 + R_3)U$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 \end{vmatrix} = -R_3 U$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & U \\ 0 & R_2 & 0 \end{vmatrix} = -R_2 U$$

Und erhalten:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{(R_2 + R_3)U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ I_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{R_3 U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ I_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{R_2 U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \end{aligned}$$