

Mathematik II

Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 7: Lineare Algebra
Kapitel 7.5: Eigenwerte und Eigenvektoren
einer quadratischen Matrix

- 1 Ein einführendes Beispiel
- 2 Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Ein einführendes Beispiel

Wir betrachten die *Spiegelung* eines beliebigen Punktes $P = (x_1; x_2)$ an der x_1 -Achse einer Ebene.

Der Punkt P geht dabei in den "Bildpunkt" $P' = (u_1; u_2)$ über.

Die *Transformationsgleichungen* können wir unmittelbar aus dem Bild ablesen:

$$u_1 = x_1$$

$$u_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2$$

oder

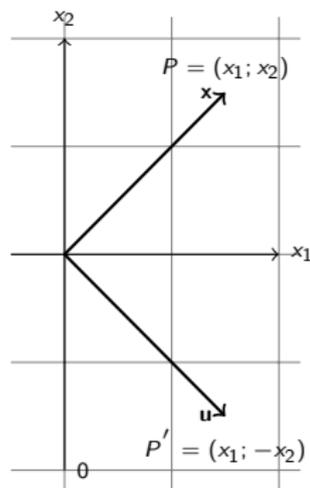
$$u_2 = -x_2$$

$$u_2 = 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2$$

Wir bringen diese Gleichung noch in die *Matrizenform*:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ein einführendes Beispiel



Der Vektor \mathbf{x} ist dabei der *Ortsvektor* des Punktes P , der Vektor \mathbf{u} der *Ortsvektor* des zugehörigen Bildpunktes P' .

Jetzt interessieren wir uns ausschliesslich für alle diejenigen (vom Nullvektor *verschiedenen*) Ortsvektoren, die bei dieser Spiegelung in einem Vektor *gleicher* Richtung oder *Gegenrichtung* übergehen.

Ein einführendes Beispiel

Diese (noch unbekannt)en Vektoren genügen also der Bedingung

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{x}$$

und somit der folgenden Matrixgleichung:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dabei ist \mathbf{E} die 2-reihige *Einheitsmatrix*.

Die als *charakteristische Matrix* von \mathbf{A} bezeichnete Matrix $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ besitzt die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Die Matrixgleichung lautet daher in ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein einführendes Beispiel

Dieses *homogene lineare Gleichungssystem* mit den beiden unbekanntenen Koordinaten x_1 und x_2 enthält noch einen (ebenfalls unbekanntenen) Parameter λ und ist bekanntlich nur dann nicht-trivial lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante *verschwindet*, d.h.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

gilt.

Hieraus erhalten wir die sog. *charakteristische Gleichung* der Matrix \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung heißen Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} .

Sie lauten hier also:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Zu diesen Eigenwerte gehören bestimmte Ortsvektoren, die in diesem Zusammenhang als *Eigenvektoren* der Matrix \mathbf{A} bezeichnet werden.

Ein einführendes Beispiel

Man erhält sie, indem man in das homogene lineare Gleichungssystem für den Parameter λ den jeweiligen *Eigenwert* einsetzt und anschliessend das Gleichungssystem löst.

Mit der Bestimmung dieser Eigenvektoren wollen wir uns jetzt näher befassen.

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$

Einsetzen des *ersten* Eigenwertes $\lambda_1 = 1$ liefert das homogene lineare Gleichungssystem

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

$$0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0$$

Dieses System *reduziert* sich auf die *eine* Gleichung

$$-2x_2 = 0$$

mit der *Lösung* $x_2 = 0$.

Da die *erste* Unbekannte x_1 in dieser Gleichung *nicht* auftritt, dürfen wir über x_1 *frei verfügen* und setzen daher $x_1 = \alpha$.

Das Gleichungssystem besitzt damit die von dem *reellen Parameter* α abhängige Lösung

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörige *Eigenvektor* ist somit bis auf einen *beliebigen konstanten* Faktor $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt.

Wir wählen $\alpha = 1$ und erhalten den *normierten Eigenvektor*

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alle weiteren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektoren sind dann ein *Vielfaches* (α -faches) des *normierten* Eigenvektors $\tilde{\mathbf{x}}_1$ ($\alpha \neq 0$).

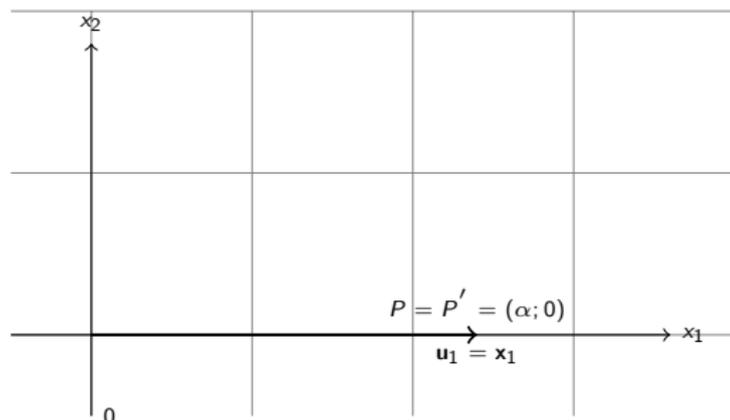
In der Praxis beschränkt man sich daher auf die Angabe dieses Eigenvektors und betrachtet $\tilde{\mathbf{x}}_1$ als den zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektor.

Ein einführendes Beispiel

Geometrische Deutung:

Die zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehörenden Eigenvektoren sind die *Ortsvektoren* der auf der x_1 -Achse liegenden Punkte, die bei der Spiegelung an dieser Achse *in sich selbst* übergehen (ausgenommen ist der Nullpunkt).

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[x_1 \text{ Achse}]{\text{Spiegelung an der}} \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}_1$$



Ein einführendes Beispiel

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$

Wir setzen jetzt den *zweiten* Eigenwert $\lambda_2 = -1$ in die Gleichung ein und erhalten das homogene lineare Gleichungssystem

$$2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

Dieses System *reduziert* sich auf die *eine* Gleichung

$$2x_1 = 0$$

mit der Lösung $x_1 = 0$.

Die *zweite* Unbekannte tritt in dieser Gleichung *nicht* auf, darf daher *frei gewählt* werden.

Wir setzen $x_2 = \beta$ und erhalten für das Gleichungssystem die von dem *reellen Parameter* β abhängige Lösung

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = -\beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Ein einführendes Beispiel

Wiederum ist der Eigenvektor bis auf einen *beliebigen konstanten* Faktor $\beta \neq 0$ eindeutig bestimmt.

Wir wählen $\beta = 1$ und erhalten so den *normierten Eigenvektor*

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

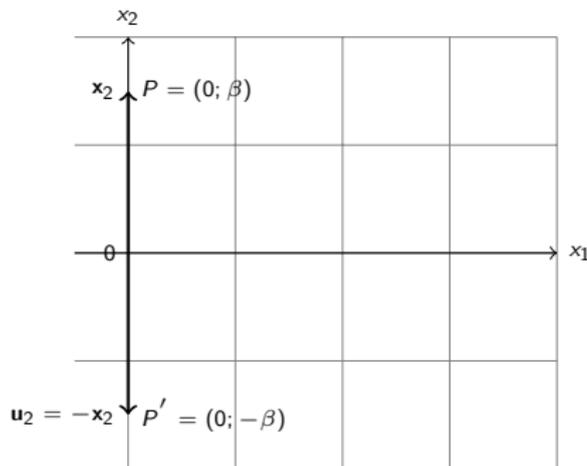
Alle weiteren *zum* Eigenwert $\lambda_2 = -1$ gehörenden Eigenvektoren sind dann ein *Vielfaches* (β -faches) dieses *normierten* Eigenvektors $\tilde{\mathbf{x}}_2$ ($\beta \neq 0$).

Ein einführendes Beispiel

Geometrische Deutung:

Die zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ gehörenden Eigenvektoren sind die *Ortsvektoren* der auf der x_2 -Achse liegenden Punkte, die bei der Spiegelung an der x_1 -Achse in den jeweiligen *Gegenvektor* übergehen.

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{\scriptsize } x_1 \text{ Achse}]{\text{\scriptsize Spiegelung an der}} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \end{pmatrix} = -\mathbf{x}_2$$



Ein einführendes Beispiel

Fazit

Die *Eigenvektoren* der Transformationsmatrix \mathbf{A} sind in diesem Beispiel diejenigen (vom Nullvektor *verschiedenen*) *Ortsvektoren*, die bei der Spiegelung an der x_1 -Achse entweder *in sich selbst* oder in den entsprechenden *Gegenvektor* übergehen.

Die beiden Eigenwerte haben folgende *geometrische* Bedeutung:

- $\lambda_1 = 1$:
Richtung und Länge des Ortsvektor bleiben bei der Spiegelung *erhalten* (Punkte auf der x_1 -Achse mit *Ausnahme* des Nullpunktes)
- $\lambda_2 = -1$:
Richtungsumkehr des Ortsvektor bei der Spiegelung (Punkte auf der x_2 -Achse mit *Ausnahme* des Nullpunktes)

Die Spiegelung an der x_1 -Achse haben wir in eindeutiger Weise durch die 2-reihige *Transformationsmatrix*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschreiben können.

Ein einführendes Beispiel

Die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* dieser Matrix lieferten uns dabei diejenigen Ortsvektoren, die bei dieser Spiegelung entweder *unverändert* bleiben oder aber eine *Richtungsumkehr* erfahren.

Man nennt allgemein ein Problem dieser Art ein *Matrixeigenwertproblem*.

Die Aufgabe besteht dann darin, die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der vorgegebenen (quadratischen) Matrix \mathbf{A} zu bestimmen.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

\mathbf{A} sei eine 2-reihige Matrix.

Wir ordnen dann jedem Vektor \mathbf{x} der Ebene durch die Abbildungsgleichung (*Transformationsgleichung*)

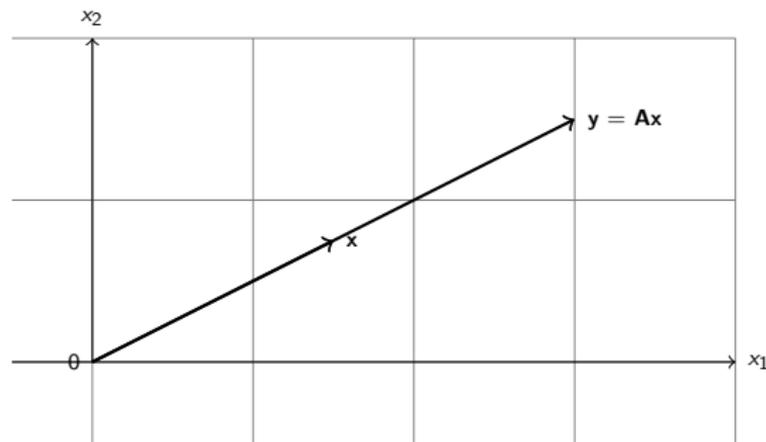
$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$$

in eindeutiger Weise einen *Bildvektor* \mathbf{y} der gleichen Ebene zu.

Wie in unserem einführenden Beispiel können wir wiederum den Vektor \mathbf{x} als den *Ortsvektor* eines (ebenen) Punktes P auffassen, der bei dieser Transformation in den Ortsvektor $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ des zugeordneten *Bildpunktes* P' übergeführt wird.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Unsere *Problemstellung* lautet jetzt wie folgt: gibt es bestimmte Richtungen, die sich von den anderen Richtungen dadurch unterscheiden, daß der *Urbildvektor* x und der zugehörige *Bildvektor* $y = Ax$ in eine *gemeinsame* Linie (Gerade) fallen? Für eine solche bevorzugte Richtung muß also gelten: fällt der Urbildvektor x in diese Richtung, so liegt auch der Bildvektor $y = Ax$ in dieser Richtung.



Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die Richtung selbst ist dabei durch Angabe des in diese Richtung fallenden *Urbildvektors* \mathbf{x} eindeutig festgelegt.

Für solche bevorzugten Richtungen muss also gelten, dass der *Bildvektor* $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ ein Vielfaches (λ -faches) des *Urbildvektors* \mathbf{x} darstellt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

Die (noch unbekannt)en bevorzugten Richtungen bzw. die in diese Richtungen fallenden *Urbildvektoren* genügen somit der Matrixgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ex} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Durch diese Gleichung wird die sog. *Matrixeigenwertproblem* beschrieben.

Die Matrix $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ ist die sog. *characteristische Matrix* von \mathbf{A} .

In ausführlicher Schreibweise lautet die Matrixgleichung wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Nicht-triviale Lösungen, d.h. vom Nullvektor $\mathbf{0}$ *verschiedene* Lösungen treten jedoch nur dann auf, wenn die Koeffizientendeterminante des homogenen linearen Gleichungssystem *verschwindet*.

Dies führt zu der folgenden *charakteristischen Gleichung* mit dem unbekanntem Parameter λ :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die 2-reihige Determinante $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ wird dabei als *charakteristisches Polynom* $p(\lambda)$ der Matrix \mathbf{A} bezeichnet.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung heißen *Eigenwerte*, die zugehörigen (vom Nullvektor verschiedenen) Lösungsvektoren *Eigenvektoren* der Matrix \mathbf{A} .

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die *Eigenwerte* der Matrix \mathbf{A} werden aus der *charakteristischen Gleichung* berechnet, sind also die *Nullstellen des charakteristischen Polynom* $p(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\
 &= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{\text{Sp}(\mathbf{A})}\lambda + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{\det \mathbf{A}} = 0
 \end{aligned}$$

Die *Koeffizienten* dieser quadratischen Gleichung haben dabei folgende Bedeutung:

der *erste* Koeffizient ist mit einem Minuszeichen versehene sog. *Spur* der Matrix \mathbf{A} , definiert durch die Gleichung

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$$

(*Summe der Hauptdiagonalelemente*).

Der *zweite* Koeffizient ist die *Koeffizientendeterminante*

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Sind λ_1 und λ_2 die beiden *Eigenwerte*, d.h. die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung, so können wir das *charakteristische Polynom*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{Sp}(\mathbf{A}) \cdot \lambda + \det \mathbf{A}$$

auch in der *Produktform*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

darstellen (Zerlegung in *Linearfaktoren*).

Durch einen Vergleich der Koeffizienten in den beiden Gleichungen erhalten wir dann zwei wichtige Beziehungen zwischen der *Spur* and der *Determinante* von \mathbf{A} einerseits und den beiden *Eigenwerten* λ_1 und λ_2 der Matrix \mathbf{A} andererseits:

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Durch die Matrixgleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

wird ein *zweidimensionales Eigenwertproblem* beschrieben. Dabei bedeuten:

- A** : 2-reihige (reelle oder komplexe) Matrix
- E** : 2-reihige *Einheitsmatrix*
- λ : *Eigenwert* der Matrix **A**
- x** : *Eigenvektor* der Matrix **A** zum Eigenwert λ
- A** - λ **E** : *Charakteristische Matrix* von **A**

Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der Matrix \mathbf{A} lassen sich dann schrittweise wie folgt berechnen:

- 1 Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

(*quadratische Gleichung* mit den beiden Lösungen λ_1 und λ_2).

- 2 Der zum Eigenwert λ_i gehörige *Eigenvektor* \mathbf{x}_i ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

Er wird üblicherweise in der *normierten* Form angegeben.

Eigenschaften der Eigenwerte

Eigenschaften der Eigenwerte

- 1 Die *Spur* der Matrix \mathbf{A} ist gleich der *Summe* der beiden Eigenwerte:

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2$$

- 2 Die *Determinante* von \mathbf{A} ist gleich dem *Produkt* der beiden Eigenwerte:

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2$$

Anmerkungen

- Sind die beiden Eigenwerte voreinander *verschieden*, so sind die zugehörigen Eigenvektoren *linear unabhängig*.
- Zu einem *doppelten* (*zweifachen*) Eigenwert gehören mindestens ein, höchstens aber zwei, *linear unabhängige* Eigenvektoren.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Beispiel

Wir berechnen die *Eigenwerte* der 2-reihigen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Sie sind die Lösungen der folgenden *charakteristische Gleichung*:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -5 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)(4 - \lambda) + 5 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte *lauten* demnach: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Der zum Eigenwert λ_1 gehörende *Eigenvektor* wird aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} + 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt.

In ausführlicher Schreibweise lautet dieses System wie folgt:

$$\begin{aligned} -x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem *reduziert* sich auf die *eine* Gleichung

$$x_1 + 5x_2 = 0.$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Eine bei der beiden Unbekannten ist somit *frei wählbar*.

Wir entscheiden uns für x_2 und setzen daher $x_2 = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Die vom reellen Parameter α abhängige Lösung lautet dann $x_1 = -5\alpha$, $x_2 = \alpha$.

Den Lösungsvektor (Eigenvektor)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wollen wir noch *normieren*:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Analog lässt sich der zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$ gehörende *Eigenvektor* aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

bestimmen.

Dieses Gleichungssystem lautet in ausführlicher Schreibweise wie folgt:

$$\begin{aligned} -5x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es reduziert sich auf *eine* Gleichung

$$x_1 + x_2 = 0$$

die aber noch *zwei* unbekannte Größen enthält.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Wir können daher *eine* der beiden Unbekannten *frei wählen* und entscheiden uns dabei für x_2 , d.h wir setzen $x_2 = \beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$).

Die vom reellen Parameter β abhängige Lösung ist dann $x_1 = -\beta$, $x_2 = \beta$.

Der gesuchte *Eigenvektor* lautet somit

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder (in der *normierten* Form)

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die *normierten* Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ der Matrix \mathbf{A} sind dabei *linear unabhängig*, da sie zu *verschiedenen* Eigenwerten gehören.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Durch die Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

wird die *Drehung* eines ebenen x_1, x_2 -Koordinatensystems um den Winkel ϕ um den Nullpunkt beschrieben.

Für welche Drehwinkel erhalten wir *reelle* Eigenwerte ($0^\circ < \phi < 360^\circ$)?

Lösung

Die *Eigenwerte* berechnen sich aus der *characteristischen Gleichung*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} \cos(\phi) - \lambda & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\cos(\phi) - \lambda)(\cos(\phi) - \lambda) + \sin(\phi)^2 \\ &= \lambda^2 - 2 \cos(\phi) \cdot \lambda + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Sie lauten:

$$\lambda_{1/2} = \cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) - 1}$$

Reelle Werte sind demnach nur möglich, wenn die Bedingung

$$\cos^2(\phi) - 1 \geq 0 \quad \text{und damit} \quad \cos^2(\phi) \geq 1$$

erfüllt ist.

Andererseits gilt stets $\cos^2(\phi) \leq 1$.

Beide Bedingungen *zusammen!* führen dann auf die Gleichung

$$\cos^2(\phi) = 1$$

die im Intervall $0^\circ < \phi < 360^\circ$ genau *eine* Lösung besitzt, nämlich $\phi = 180^\circ$ oder (im Bogenmass) $\phi = \pi$.

Dieser Wert entspricht einer *Drehung* des Koordinatensystems um 180° im *Gegenuhrzeigersinn*.

Zum Winkel $\phi = \pi$ gehört der *doppelte* Eigenwert $\lambda_{1/2} = \cos(\pi) = -1$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die zugehörigen (linear unabhängigen) *Eigenvektoren* lassen sich dann aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} + 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen (in der Matrix \mathbf{A} wurde $\phi = \pi$ gesetzt).

Dieses Gleichungssystem lautet in ausführlicher Schreibweise

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

und reduziert sich auf die *eine* Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Die Unbekannten x_1 und x_2 sind somit beide *frei wählbar*.

Wir setzen daher $x_1 = \alpha$ und $x_2 = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Damit erhalten wir von zwei Parametern abhängigen Lösungsvektor (Eigenvektor)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

und daraus für $\alpha = 1, \beta = 0$ bzw. $\alpha = 0, \beta = 1$ die beiden *linear unabhängigen* (und bereits normierten) *Eigenvektoren*

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der *allgemeine* Lösungsvektor \mathbf{x} ist dann als *Linearkombination* dieser (orthonormierten) Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ darstellbar:

$$\mathbf{x} = \alpha \tilde{\mathbf{x}}_1 + \beta \tilde{\mathbf{x}}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Er beschreibt den *Ortsvektor* des Punktes $P = (\alpha; \beta)$ und geht bei der Drehung um 180° in den *Gegenvektor*

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = -\mathbf{x}$$

über.

Der *zweifache Eigenwert* $\lambda_{1/2} = -1$ bewirkt also lediglich eine *Richtungsumkehr* des Ortsvektor \mathbf{x} (*Punktspiegelung* am Koordinatenursprung, der Nullpunkt selbst muss wiederum *ausgenommen* werden).

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Analoge Betrachtungen führen bei einer n -reihigen Matrix \mathbf{A} auf das n -dimensionale Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{oder} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Die Lösung dieser Aufgabe, d.h. die Bestimmung der *Eigenwerte* und der zugehörigen *Eigenvektoren*, erfolgt dann ähnlich wie bei einer 2-reihigen Matrix.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer 2-reihigen Matrix

Durch die Matrixgleichung

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

wird ein n -dimensionales Eigenwertproblem beschrieben. Dabei bedeuten:

- \mathbf{A} : n -reihige (reelle oder komplexe) Matrix
- \mathbf{E} : n -reihige Einheitsmatrix
- λ : Eigenwert der Matrix \mathbf{A}
- \mathbf{x} : Eigenvektor der Matrix \mathbf{A} zum Eigenwert λ
- $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$: Charakteristische Matrix von \mathbf{A}

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der Matrix \mathbf{A} lassen sich dann schrittweise wie folgt berechnen:

- 1 Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

(*algebraische* Gleichung der Ordnung n mit den Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$).

- 2 Der zum Eigenwert λ_i gehörige *Eigenvektor* \mathbf{x}_i ergibt sich als Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Er wird üblicherweise in der *normierten* Form angegeben.

Bei einem *mehrfachen* Eigenwert können auch *mehrere* Eigenvektoren auftreten, siehe weiter unten.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Eigenschaften der Eigenwerte

- 1 Die *Spur* der Matrix \mathbf{A} ist gleich der *Summe* aller Eigenwerte:

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

- 2 Die *Determinante* von \mathbf{A} ist gleich dem *Produkt* der beiden Eigenwerte:

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

- 3 Sind *alle* Eigenwerte voreinander *verschieden*, so gehört zu jedem Eigenwert genau *ein* linear unabhängiger Eigenvektor, der bis auf einem (beliebigen) *konstanten* Faktor eindeutig bestimmt ist. Die n Eigenvektoren werden üblicherweise *normiert* und sind *linear unabhängig*.
- 4 Tritt ein Eigenwert dagegen *k-fach* auf, so gehören hierzu *mindestens ein*, *höchstens* aber k linear unabhängige Eigenvektoren.
- 5 Die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer *linear unabhängig*.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Anmerkungen

- Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} sind die *Nullstellen* des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$.
- Eine n -reihige Matrix \mathbf{A} ist genau dann *regulär*, wenn *sämtliche* Eigenwerte von Null *verschieden* sind.
- Ist λ_i ein Eigenwert der *regulären* Matrix \mathbf{A} , so ist die Kehrwert $1/\lambda_i$ ein Eigenwert der *inversen* Matrix \mathbf{A}^{-1} .
- Beim Auftreten *mehrfacher* Eigenwerte kann also die *Gesamtzahl* linear unabhängiger Eigenvektoren *kleiner* sein als n .

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Beispiel

Welche *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* besitzt die 3-reihige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Lösung:

Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & -3 & 0 - \lambda \end{vmatrix}$$

Sie lauten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

Wir bestimmen jetzt die zugehörigen *Eigenvektoren*.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 0$

Der *Eigenvektor* genügt dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\mathbf{x} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} - x_1 & \\ - x_1 + 3x_2 & = 0 \\ - 3x_2 & = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Dabei ist $\alpha \neq 0$ eine willkürliche Konstante (da x_3 in den Gleichungen *nicht* auftritt, können wir über diese Unbekannte *frei verfügen* und setzen daher $x_3 = \alpha$).

Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ gehörende *Eigenvektor* lautet somit:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

Er ist bis auf den *konstanten* Faktor $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt.

Durch *Normierung* erhalten wir schliesslich den gesuchten *Eigenvektor*

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Eigenvektor zu $\lambda_2=1$

Das homogene lineare Gleichungssystem lautet jetzt:

$$(\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Da dieses System *drei* Unbekannte, aber *nur* zwei Gleichungen besitzt, kann *eine* der unbekanntenen Grössen *frei gewählt* werden.

Wir entscheiden uns für die Unbekannte x_2 und setzen $x_2 = \beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$).

Das Gleichungssystem wird dann gelöst durch $x_1 = 2\beta$, $x_2 = \beta$, $x_3 = -3\beta$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Damit lautet der zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ gehörende *Eigenvektor* wie folgt:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \\ -3\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \beta \neq 0$$

Er ist bis auf den *konstanten* Faktor $\beta \neq 0$ eindeutig bestimmt.
Durch *Normierung* folgt schliesslich:

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \beta \neq 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Eigenvektor zu $\lambda_3=3$

Diesmal erhalten wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} -2x_1 &= 0 \\ -x_1 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $x_1 = 0$, $x_2 = -\gamma$, $x_3 = \gamma$.

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Dabei ist $\gamma \neq 0$ eine *willkürliche* Konstante.

Der zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$ gehörende *Eigenvektor* ist damit bis auf den *konstanten* Faktor $\gamma \neq 0$ eindeutig bestimmt.

Er lautet:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder in der üblichen *normierten* Form:

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren einer n -reihigen Matrix

Die drei Eigenvektoren sind - wie erwartet - *linear unabhängig*, da die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

regulär ist.