

Mathematik II

Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 8. Funktionen von mehreren Variablen
Kapitel 8.3 Anwendungen der partiellen Differentiation (Teil 1):
Kettenregel und Linearisierung

- 1 Implizite Differentiation
- 2 Linearisierung einer Funktion

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

$z = f(x; y)$ sei eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen x und y , diese wiederum von zwei Parametern u und v abhängige Funktionen:

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (u_1 \leq u \leq u_2; v_1 \leq v \leq v_2).$$

Dann ist die durch Einsetzen dieser beiden Parametergleichungen in die Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ erhaltene Funktion

$$z = f(x(u; v); y(u; v)) = F(u; v)$$

eine *zusammengesetzte, verkettete* oder *mittelbare* Funktion dieser Parameter, deren partielle Ableitungen 1. Ordnung nach der folgenden *Kettenregel* gebildet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} z = f(x; y) & : \text{Äussere Funktion} \\ x = x(u; v), y = y(u; v) & : \text{Innere Funktionen} \end{aligned}$$

Anmerkungen

- Auch die folgende Kurzschreibweise für die *Kettenregel* ist üblich:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

Wir können die in der Kettenregel auftretenden Ableitungen wiederum wie folgt zu *Ableitungsvektoren* zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix} : \text{Äussere Ableitung}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} : \text{Innere Ableitungen}$$

Die gesuchte partielle Ableitung ist dann das *skalare Produkt* aus der *äusseren* und der (entsprechenden) *inneren* Ableitung.

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

Beispiel

- $z = f(x; y) = e^x \cdot \cos(x - y)$ mit $x = x(u; v) = u + v^2$,
 $y = y(u; v) = u - v^2$.

Wir interessieren uns für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cdot \cos(x - y) - e^x \cdot \sin(x - y) = e^x [\cos(x - y) - \sin(x - y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cdot \sin(x - y)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 2v$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2v$$

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

- Für die gesuchten partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$ erhalten wir dann mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= e^x [\cos(x - y) - \sin(x - y)] \cdot 1 + e^x \cdot \sin(x - y) \cdot 1 \\ &= e^x \cos(x - y) \\ &= e^{u+v^2} \cos(2v^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= e^x [\cos(x - y) - \sin(x - y)] \cdot 2v + e^x \cdot \sin(x - y) \cdot (-2v) \\ &= 2v \cdot e^x [\cos(x - y) - 2 \sin(x - y)] \\ &= 2v \cdot e^{u+v^2} [\cos(2v^2) - 2 \sin(2v^2)] \end{aligned}$$

Kettenregel für Funktionen mit zwei Parametern

- Wir gelangen zu dem gleichen Ergebnis, wenn wir zunächst die Parametergleichungen in die gegebene Funktion einsetzen und diese dann nach dem *Parameter* u bzw. v partiell differenzieren:

$$\begin{aligned}
 z &= e^x \cdot \cos(x - y) = e^{u+v^2} \cos(2v^2) = F(u; v) \\
 \frac{\partial z}{\partial u} &= e^{u+v^2} \cos(2v^2) \\
 \frac{\partial z}{\partial v} &= 2v \cdot e^{u+v^2} \cos(2v^2) + e^{u+v^2} \cdot (-4v) \sin(2v^2) \\
 &= 2v \cdot e^{u+v^2} [\cos(2v^2) - 2 \sin(2v^2)]
 \end{aligned}$$

Implizite Differentiation

Wir gehen von einer in der *impliziten* Form $F(x; y) = 0$ vorgegebenen Funktion aus und fassen die durch diese Gleichung definierte Kurve als *Schnittlinie* der Fläche $z = F(x; y)$ mit der (x, y) -Ebene $z=0$. Für die Punkte der *Schnittkurve* ist $z = 0$ und somit auch

$$dz = F_x dx + F_y dy = 0.$$

Implizite Differentiation

Der *Anstieg* einer in der impliziten Form $F(x; y) = 0$ dargestellten Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x; y)$ lässt sich mit Hilfe der *partiellen Differentiation* wie folgt bestimmen:

$$y'(P) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} \quad (F_y(x; y) \neq 0)$$

Dabei bedeuten:

$$\left. \begin{array}{l} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{array} \right\} \text{Partielle Ableitungen 1. Ordnung von } z = F(x; y)$$

Implizite Differentiation

Beispiel

- Welche *Steigung* besitzt die Kurve mit der Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$$

im Kurvenpunkt $P = (0; 1)$?

- *Lösung:*

$$F_x(x; y) = 4x(x^2 + y^2) - 6x^2 - 2y^2$$

$$F_y(x; y) = 4y(x^2 + y^2) - 4xy - 2y$$

$$\begin{aligned} y'(P) &= -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} \\ &= -\frac{2x(x^2 + y^2) - 3x^2 - y^2}{2y(x^2 + y^2) - 2xy - y} \end{aligned}$$

Speziell im Punkt $P = (0; 1)$ gilt dann:

$$y'(P) = y'(x = 0; y = 1) = 1$$

Linearisierung einer Funktion

Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung eines Flächenpunktes (Arbeitspunkt) $P = (x_0; y_0; z_0)$ kann die *nichtlineare* Funktion $z = f(x; y)$ *näherungsweise* durch die lineare Funktion (Tangentialebene)

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0)$$

oder

$$\Delta z = f_x(x_0; y_0)\Delta x + f_y(x_0; y_0)\Delta y$$

ersetzt werden.

Dabei bedeuten:

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: *Abweichungen* eines beliebigen Flächenpunktes gegenüber dem Arbeitspunkt P .

Linearisierung einer Funktion

Anmerkung

- Auch eine Funktion von n unabhängigen Variablen lässt sich *linearisieren*. In der unmittelbaren Umgebung des Arbeitspunktes P kann die Funktion $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ näherungsweise durch das *totale Differential* ersetzt werden:

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_0 \Delta x_n$$

Die partiellen Ableitungen beziehen sich dabei wiederum auf den *Arbeitspunkt* P , gekennzeichnet durch den Index "0".

Linearisierung einer Funktion

Beispiel

- Wir *linearisieren* die Funktion $z = f(x; y) = 5x^2 \cdot \sqrt{y}$ in der unmittelbaren Umgebung des Punktes $P=(2;1;20)$.

$$\Delta z = f_x(2; 1)\Delta x + f_y(2; 1)\Delta y$$

Wir berechnen die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*:

$$f_x(2; 1) = 10x \cdot \sqrt{y} \Rightarrow f_x(2; 1) = 20$$

$$f_y(2; 1) = \frac{5x^2}{2\sqrt{y}} \Rightarrow f_y(2; 1) = 10$$

Die *lineare Näherungsfunktion* lautet somit:

$$\Delta z = 20\Delta x + 10\Delta y$$

oder, mit $\Delta x = x - 2$, $\Delta y = y - 1$, und $\Delta z = z - 20$:

$$z = 20x + 10y - 30$$