Mathematik II
Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 8. Funktionen von mehreren Variablen
Kapitel 8.4 Anwendungen der partiellen Differentiation (Teil 2):
Extremwerte

Relative oder lokale Extremwerte

Definition

Eine Funktion $z = f(x; y)$ besitzt an der Stelle $(x_0; y_0)$ ein *relatives Maximum* [bzw. *relatives Minimum*], wenn es eine Umgebung von $(x_0; y_0)$ existiert, so dass

$$f(x_0; y_0) > f(x; y) \quad [\text{ bzw.} \quad f(x_0; y_0) < f(x; y)]$$

für alle (x, y) in dieser Umgebung $((x; y) \neq (x_0; y_0))$ gilt.

Anmerkungen

- Die *relativen Maxima* und *Minima* einer Funktion werden unter dem Sammelbegriff "Relative Extremwerte" zusammengefasst. Die den Extremwerten entsprechenden Flächenpunkte heissen *Hoch-* bzw. *Tiefpunkte*.
- Ein *relativer* Extremwert wird auch als *lokaler* Extremwert bezeichnet, da die extreme Lage meist nur in der *unmittelbaren Umgebung* zutrifft.
- Ist die Ungleichung an *jeder* Stelle $(x; y)$ des Definitionsbereiches von $z = f(x; y)$ erfüllt, so liegt ein *absolutes Maximum* bzw. *absolutes Minimum* vor.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiele

- Die *Rotationsfläche* $z = e^{-x^2+y^2}$ ist aus der *Gauss-schen Glockenkurve* $z = e^{-x^2}$ durch *Drehung* dieser Kurve um die z-Achse entstanden. Die *Rotationsfläche* besitzt im Punkt $P = (0; 0; 1)$ einen *Hochpunkt*.

Notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert

In einem *relativen Extremum* $(x_0; y_0)$ der Funktion $z = f(x; y)$ besitzt die zugehörige Bildfläche stets eine zur (x, y)-Ebene *parallele* Tangentialebene. Die Bedingungen

$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$

sind daher *notwendige* Voraussetzungen für die Existenz eines relativen Extremwertes an der Stelle $(x_0; y_0)$.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiel

- Mit der Funktionsgleichung $z = x^2 - y^2$ sind die *notwendingen* Bedingungen an der Stelle $(0;0)$ für ein relatives Extremum erfüllt:

$$\begin{aligned} z_x(x;y) &= 2x \quad \Rightarrow \quad z_x(0;0) = 0 \\ z_y(x;y) &= -2y \quad \Rightarrow \quad z_y(0;0) = 0 \end{aligned}$$

Und trotzdem besitzt die Funktion $z = x^2 - y^2$ keinen Extremwert.

Begründung: der Schnitt der Fläche mit der x, z-Ebene $(y = 0)$ ergibt die nach oben geöffnete Normalparabel $z = x^2$, die in P ihr (absolutes) *Minimum* besitzt.

Schneidet man die Fläche jedoch mit der y, z-Ebene $(x = 0)$, so erhält man die nach *unten* geöffnete Normalparabel $z = -y^2$, die in P ihr (absolutes) Maximum annimmt.

Der Flächenpunkt $P = (0;0;0)$ kann daher kein Extremum sein. Es handelt sich vielmehr um einen sog. *Sattelpunkt*.

Relative oder lokale Extremwerte

Hinreichende Bedingungen für einen relativen Extremwert

Eine Funktion $z = f(x; y)$ besitzt an der Stelle $(x_0; y_0)$ mit *Sicherheit* einen *relativen Extremwert*, wenn die folgenden Bedingungen zugleich erfüllt sind:

1. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung *verschwinden* in $(x_0; y_0)$:

$$f_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0; y_0) = 0$$

2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung genügen der Ungleichung

$$\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}^2(x_0; y_0) > 0$$

Ist ferner $f_{xx}(x_0; y_0) < 0$ so liegt ein *relatives Maximum* vor,
für $f_{xx}(x_0; y_0) > 0$ dagegen ein *relatives Minimum*.

Relative oder lokale Extremwerte

Anmerkungen

- Die Diskriminante Δ kann auch als *zweireihige Determinante* geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix}$$

- In den Fällen $\Delta < 0$ und $\Delta = 0$ gilt:
  $\Delta < 0$: Es liegt *kein Extremwert*, sondern ein *Sattelpunkt* vor.
  $\Delta = 0$: Das Kriterium ermöglicht in diesem Fall *keine* Entscheidung darüber, ob an der Stelle $(x_0; y_0)$ ein relativer Extremwert vorliegt oder nicht.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiel

- Wir zeigen dass die Rotationfläche mit der Funktionsgleichung $z = f(x; y) = e^{-(x^2+y^2)}$ an der Stelle $(0; 0)$ ein (sogar absolutes) Maximum annimmt.

  Dazu benötigen wir die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
f_x(x; y) &= -2x \cdot e^{-(x^2+y^2)} \\
f_y(x; y) &= -2y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xx}(x; y) &= (4x^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xy}(x; y) &= 4xy \cdot e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yy}(x; y) &= (4y^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

Relative oder lokale Extremwerte

- Sie besitzen an der Stelle $(0;0)$ die folgenden Werte:

$$f_x(0;0) = 0, \quad f_y(0;0) = 0$$

(damit sind die *notwendigen* Bedingungen erfüllt)

$$f_{xx}(0;0) = -2, \quad f_{xy}(0;0) = 0, \quad f_{yy}(0;0) = -2$$

Wegen

$$\Delta = f_{xx}(0;0) \cdot f_{yy}(0;0) - f_{xy}^2(0;0) = 4 > 0$$

ist auch das *hinreichende* Kriterium erfüllt.

Da ferner $f_{xx}(0;0) < 0$ ist, liegt an der Stelle $(0;0)$ ein *relatives Maximum*: $f(0;0) = 1$.

An allen übrigen Stellen ist $f(x;y) < 1$, so dass der Flächenpunkt $P = (0;0;1)$ sogar das *absolutes Maximum* auf der Fläche darstellt.

Relative oder lokale Extremwerte

Beispiel

- Wir bestimmen die *relativen Extremwerte* der Funktion $z(x;y) = 3xy - x^3 - y^3$.
  Die dabei benötigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten:

$$z_x = 3y - 3x^2, \quad z_y = 3x - 3y^2$$
$$z_{xx} = -6x, \quad z_{xy} = z_{yx} = 3, \quad z_{yy} = -6y$$

  Die *notwendigen* Bedingungen $z_x = 0$ und $z_y = 0$ führen zu dem *nicht-linearen* Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 3y - 3x^2 &= 0 \\ 3x - 3y^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{d.h} \quad \left\}\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= x^4 \end{aligned}\right.$$

  mit *zwei* reellen Lösungen $(x_1; y_1) = (0;0)$ und $(x_2; y_2) = (1;1)$.

- Wir prüfen jetzt anhand der Diskriminante Δ aus, ob auch das *hinreichende* Kriterium zutrifft:
  - **Stelle** $(x_1; y_1) = (0; 0)$

$$z_{xx}(0;0) = z_{yy}(0;0) = 0, \quad z_{xy}(0;0) = 3$$

$$\Delta = -9 < 0 \Rightarrow \text{ Kein Extremwert, sondern Sattelpunkt}$$

  - **Stelle** $(x_2; y_2) = (1; 1)$

$$z_{xx}(1;1) = z_{yy}(1;1) = -6, \quad z_{xy}(1;1) = 3$$

$$\Delta = 27 > 0 \text{ und } z_{xx}(1;1) < 0 \Rightarrow \text{ Relatives Maximum}$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen: 1. Schritt

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Die *Extremwerte* einer Funktion $z = f(x; y)$, deren unabhängige Variable x und y einer *Neben*- oder *Kopplungsbedingung* $\phi(x; y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des *Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens* schrittweise wie folgt bestimmen:

- Aus der Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ und der Neben- oder Kopplungsbedingung $\phi(x; y) = 0$ wird zunächst die "Hilfsfunktion"

$$F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot \phi(x; y)$$

gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heisst *Lagrangescher Multiplikator*.

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen: 2. Schritt

Lagrangesches Multiplikatorverfahren

- Dann werden die partiellen Albeitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich *Null* gesetzt:

$$\left.\begin{array}{l} F_x = f_x(x;y) + \lambda \cdot \phi_x(x;y) = 0 \\ F_y = f_y(x;y) + \lambda \cdot \phi_y(x;y) = 0 \\ F_\lambda = \phi(x;y) = 0 \end{array}\right\}$$

  Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten *Extremwerte* sowie der *Lagrangesche Multiplikator* λ bestimmen.

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Anmerkung

- Das *Lagrangesche Multiplikatorsverfahren* lässt sich auch auf Funktionen von n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit m Nebenbedingungen übertragen $(m < n)$:

  Funktion: $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$

  Nebenbedingungen: $\phi_i(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$

  Man bildet zunächst die "Hilfsfunktion"

  $$F(x_1; x_2; \dots; x_n; \lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n) = f(x_1; x_2; \dots; x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

  und setzt dann die $(n + m)$ partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion der Reihe nach gleich *Null:*

  $$F_{x_1} = 0, \quad F_{x_2} = 0, \quad \dots, \quad F_{x_n} = 0$$
  $$F_{\lambda_1} = 0, \quad F_{\lambda_2} = 0, \quad \dots, \quad F_{\lambda_m} = 0$$

  Aus diesen $(n + m)$ Gleichungen lassen sich dann die $(n + m)$ Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bestimmen.

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Beispiel

- Wir kehren zu dem anfänglichen Beispiel des *Widerstandsmomentes* eines Balkens zurück. Mit der Funktion

$$W = W(b; h) = \frac{1}{6} bh^2$$

und der *Nebenbedingung*

$$\phi = \phi(b; h) = b^2 + h^2 - 4R^2 = 0$$

bilden wir zunächst die "Hilfsfunktion"

$$F(b; h; \lambda) = W(b; h) + \lambda \cdot \phi(b; h) = \frac{1}{6} bh^2 + \lambda \cdot (b^2 + h^2 - 4R^2)$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

- und daraus dann durch partielles Differenzieren die folgenden *Bestimmungsgleichungen* für die Balkenbreite b, die Balkendicke h und den *Lagrangeschen Multiplikator* λ:

$$\begin{aligned} F_b &= \frac{1}{6}h^2 + 2\lambda b = 0 \\ F_h &= \frac{1}{3}bh + 2\lambda h = 0 \\ F_\lambda &= b^2 + h^2 - 4R^2 = 0 \end{aligned}$$

Die *mittlere* Gleichung lösen wir nach λ auf, erhalten $\lambda = -b/6$ und setzen diesen Wert dann in die *erste* Gleichung ein:

$$\frac{1}{6}h^2 + 2 \cdot \frac{b}{6}b = 0 \Rightarrow h^2 = 2b^2 \quad (h = \sqrt{2}b)$$

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

- Denn erhalten wir:

$$b^2 + h^2 - 4R^2 = 0 \Rightarrow b_{1/2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}R$$

Aus geometrischen Gründen kommt aber nur der *positive* Wert in Frage, der in dem Gülitgkeitsbereich $0 < b < 2R$ liegt.

Die *Lösung* der gestellten Extremwertaufgabe lautet daher:

$$\begin{aligned} b &= \frac{2}{3}\sqrt{3}R \\ h &= \sqrt{2}b \\ W_{max} &= \frac{8}{27}\sqrt{3}R^3 \end{aligned}$$

Direkte Messung einer Grösse

Auswertung einer Messreihe

Das *Ergebnis* einer aus n Messwerten bestehenden Messreihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird in der Form $x = \overline{x} \pm \Delta x$ angegeben. Dabei bedeuten:

- $\overline{x}$: *Arithmetischer Mittelwert der n Messwerte*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Δx: *Messunsicherheit* (hier gleichgesetzt mit der *Standardabweichung* $s_{\overline{x}}$ des Mittelwertes)

$$\Delta x = s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Direkte Messung einer Grösse

Beispiel

- Eine *wiederholte* Kapazitätsmessung ergab die folgenden Messwerte:

i	1	2	3	4	5	6
$\frac{C_i}{\mu F}$	$50,5$	$50,9$	$50,1$	$51,8$	$49,7$	$50,3$

Arithmetischer Mittelwert:

$$\overline{C} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} C_i = 50,55\mu F$$

Direkte Messung einer Grösse

- *Standardabweichung des Mittelwertes:*

$$\begin{aligned} s_{\overline{C}} &= \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 6} \sum_{i=1}^{6} (C_i - \overline{C})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{30} \cdot 2,6750 \mu F} \\ &= 0,30 \mu F \end{aligned}$$

Messunsicherheit:

$$\Delta C = s_{\overline{C}} = 0,30 \mu F$$

Messergebnis:

$$C = \overline{C} \pm \Delta C = (50,55 \pm 0,30) \mu F$$