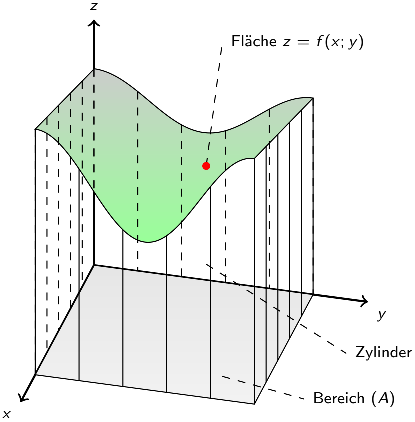
Mathematik II
Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

Kapitel 9: Mehrdimensionale Integrale

Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals



Zylindrischer Körper mit der "Deckelfläche" $z = f(x; y)$

Doppelintegral in anschaulicher Weise anhand eines *geometrischen* Problems:
$z = f(x; y)$ sei eine im Bereich (A) definierte und stetige Funktion mit $f(x; y) \geq 0$.
Betrachte den in Bild dargestellten *Zylindrischen* Körper.
Sein "Boden" besteht aus dem Bereich (A) der x, y-Ebene, sein "Deckel" ist die Bildfläche von $z = f(x; y)$. Die auf dem Rand des Bereiches (A) errichteten "Mantellinien" verlaufen dabei *parrallel* zur z-Achse. Unser Interesse gilt nun dem *Zylindervolumen* V.

Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals

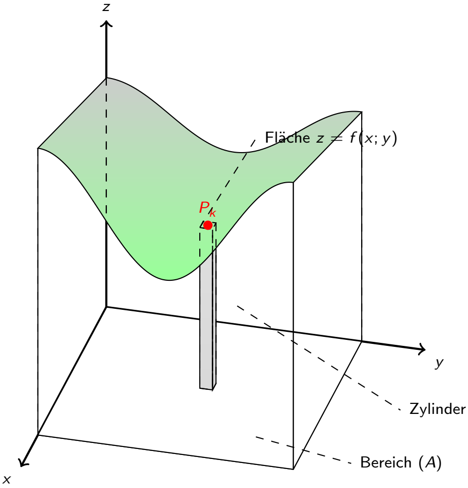
Bestimmung der Zylindervolumens

1. Zunächst wird der Bereich (A) ("Zylinderboden") in n Teilbereiche mit den Flächeninhalten ΔA_1, ΔA_2,..., ΔA_n zerlegt. Der Zylinder selbst zerfällt dabei in eine gleich grosse Anzahl von "Röhren".
2. Wir beschäftigen uns nun näher mit der (wahllos herausgegriffenen) k-ten Röhre. Ihr *Boden* ist *eben* und vom Flächeninenhalt ΔA_k, ihr *Deckel* dagegen als Teil der Bildfläche von $z = f(x; y)$ i.a *gekrümmt*. Das Volumen ΔV_k dieser Röhre stimmt dann *näherungsweise* mit dem Volumen einer Säule überein, die über der gleichen Grundfläche errichtet wird und deren Höhe durch die Höhenkoordinate $z_k = f(x_k; y_k)$ des Flächenpunktes $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ gegeben ist:

$$\Delta V_k = z_k \Delta A_k = f(x_k; y_k) \Delta A_k$$

Mit den übrigen Röhren verfahren wir ebenso. Durch *Aufsummierung* der Röhren- bzw. Säulenvolumina erhalten wir schliesslich den folgenden *Näherungswert* für das gesuchte Zylindervolumen V:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k) \Delta A_k$$



Zylindrischer Körper mit der “Deckelfläche” $z = f(x; y)$

Dieser Näherungswert lässt sich noch *verbessern*, wenn wir in geeigneter Weise die Anzahl der Röhren (Säulen) vergrössern.
Wir lassen nun die Anzahl n der Teilbereiche *unbegrentz* wachsen ($n \to +\infty$), wobei gleichzeitig der Durchmesser eines jeden Teilbereiches gegen *Null* streben soll. Bei diesem Grenzübergang strebt die Summe gegen einen *Grenzwert*.

Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals

Definition

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta \mathbf{A}_k \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_k; y_k) \Delta A_k$$

wird (falls er vorhanden ist) als *Doppelintegral* bezeichnet und durch das Symbol

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA$$

gekennzeichnet.

Definition und geometrische Deutung eines Doppelintegrals

Anmerkungen

- Auch die symbolische Schreibweise $\int\limits_{(A)} f(x;y)dA$, die nur ein Integralzeichen verwendet, ist möglich.
- Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

x, y:	*Integrationsvariable*
$f(x;y)$:	*Integrandfunktion* (kurz: *Integrand*)
dA:	*Flächendifferential* oder *Flächenelement*
(A):	*Integrationsbereich*

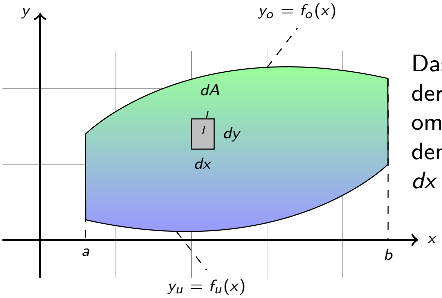
- Für den Begriff "Doppelintegral" sind auch folgende Bezeichnungen üblich: *2-dimensionales Bereichs-* oder *Gebietsintegral, Flächenintegral*.
- Der Grenzwert ist vorhanden, wenn der Integrand $f(x;y)$ im Integrationsbereich (A) *stetig* ist.

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Ein *normaler* Integrationsbereich (A) lässt sich durch die Ungleichungen

$$f_u(x) \leq y \leq f_o(x)$$

beschreiben, wobei $y_u = f_u(x)$ die *untere* und $y_o = f_o(x)$ die *obere* Randkurve ist und die *seitlichen* Begrenzungen aus zwei Parallelen zur y-Achse mit den Funktionsgleichung $x = a$ und $x = b$ bestehen.



Das *Flächenelement* dA besitzt in der kartesischen Darstellung die geometrische Form eines *Rechtecks* mit den infinitesimal kleinen Seitenlängen dx und dy. Somit ist

$$dA = dx \cdot dy$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Über diesem Flächenelement liegt eine (quadrerförmige) *Säule* mit dem infinitesimal kleinen Rauminhalt

$$dV = z \cdot dA = f(x; y) \cdot dx \cdot dy$$

Das Volumen V berechnen wir nun *schrittweise* durch Summation der Säulenvolumina.

Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Die Berechnung eines *Doppelintegrals* $\iint\limits_{(A)} f(x; y) dA$ erfolgt durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen:

$$\iint\limits_{(A)} f(x; y) dA = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{y=f_o(x)} f(x; y)\, dy \cdot dx$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten

(A): Integrationsbereich

- *Innere Integration (nach der Variablen y)*
  Die Variable x wird zunächst als eine Art *Konstante* (Parameter) betrachtet und die Funktion $(x, y) \mapsto f(x; y)$ unter Verwendung der für gewöhnliche Integrale gültigen Regeln *nach der Variablen y* integriert.

  In die ermittelte Stammfunktion setzt man dann für y die Integrationsgrenzen $f_o(x)$ bzw. $f_u(x)$ ein und bildet die entsprechende Differenz.

- *Äussere Integration(nach der Variablen x)*
  Die als Ergebnis der inneren Integration erhaltene, nur noch von der Variablen x abhängige Funktion, wird nun in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ integriert.

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Anmerkungen

- Die *Reihenfolge der Integrationen* ist eindeutig durch die *Reihenfolge der Differentiale* im Doppelintegral festgestelt. Sie ist nur dann vertauschbar, wenn sämtliche Integrationsgrenzen *konstant* sind (rechteckiger Integrationsbereich):

$$\int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} f(x;y)dy \cdot dx = \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} f(x;y)dx \cdot dy$$

- Bei einem Doppelintegral vom Typ

$$\int_{y=a}^{y=b} \int_{x=f_u(y)}^{x=f_o(y)} f(x;y)\, dx \cdot dy$$

  wird zunächst nach x und erst *anschliessend* nach der Variablen y integriert.

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Beispiel

- Wir berechnen das Doppelintegral $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{\pi/4} x \cdot cos(y) dy \cdot dx$.
- *Innere Integration (nach der Variablen y):*

$$\begin{aligned} \int\limits_{y=0}^{\pi/4} x \cdot cos(y) dy &= x \cdot \int\limits_{y=0}^{\pi/4} cos(y) dy \\ &= x \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot sin(2y) \right]_{y=0}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

- *Äussere Integration (nach der Variablen x):*

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{1} x \cdot dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{4}$$

- *Ergebnis:*

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\pi/4} x \cdot cos(y)dy \cdot dx = \frac{1}{4}$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Beispiel

- $$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \cdot dy \cdot dx = ?$$

- *Innere Integration (nach der Variablen y):*

$$\begin{aligned} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \cdot dy &= x \cdot \int_{y=x}^{\sqrt{x}} y \cdot dy \\ &= x \cdot \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x}^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} x(x - x^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - x^3) \end{aligned}$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

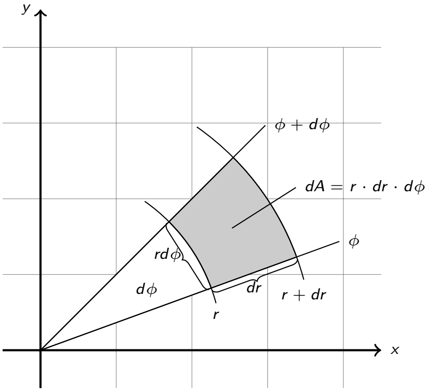
- *Äussere Integration (nach der Variablen x):*

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^3)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right] = \frac{1}{24}$$

- *Ergebnis:*

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \cdot dy \cdot dx = \frac{1}{24}$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten



Das *Flächenelement* dA wird in der Polarkoordinatendarstellung von zwei infinitesimal benachbarten *Kreisen* mit den Radien r und $r + dr$ und zwei infinitesimal benachbarten *Strahlen* mit den Polarwinkeln ϕ und $\phi + d\phi$ berandet.

$$dA = r \cdot dr \cdot d\phi$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten

Berechnung eines Doppelintegrals unter Verwendung von Polarkoordinaten

Beim Übergang von der kartesischen Koordinaten $(x; y)$ zu den *Polarkoordinaten* $(r; \phi)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi), \quad dA = r \cdot dr \cdot d\phi$$

Ein Doppelintegral $\iint\limits_{(A)} f(x; y)dA$ transformiert sich dabei wie folgt auf dem Integrationsbereich (A):

$$\iint\limits_{(A)} f(x; y)dA = \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_1(\phi)}^{r=r_2(\phi)} f(r \cdot \cos(\phi); r \cdot \sin(\phi)) \cdot r \; dr \; d\phi$$

Die Integralberechnung erfolgt dabei in *zwei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationsschritten:

- *Innere Integration* nach der Variablen r, wobei die Winkelkoordinate ϕ als Parameter festgehalten wird.
- *Äussere Integration* nach der Variablen ϕ.

Doppelintegral in Polarkoordinaten

Beispiel

- $$\iint\limits_{(A)} xy \cdot dA?$$

  mit $(A) = \{(r \cdot \cos(\phi); r \cdot \sin(\phi)),\ \phi \in [0 : \pi/4],\ r \in [0 : 2]\}$
- *Lösung:*
  Bei Verwendung der *Polarkoordinaten* transformiert sich der Integrand $f(x; y)$ wie folgt:

  $$f(x; y) = xy = r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

  Das Doppelintegral lautet somit in der Polarkoordinatendarstellung:

  $$\iint\limits_{(A)} xy \cdot dA = \int\limits_{\phi=0}^{\pi/4} \int\limits_{r=0}^{2} r^2 \cdot \cos(\phi) \sin(\phi) \cdot r \cdot \ dr\ d\phi$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten

- *Innere Integration (nach der Variablen r):*

$$\begin{aligned}\int_{r=0}^{2} r^3 \cdot \cos(\phi)\sin(\phi)\; dr &= \cos(\phi)\sin(\phi) \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{2} \\ &= 4 \cdot \cos(\phi)\sin(\phi)\end{aligned}$$

- *Äussere Integration (nach der Variablen ϕ):*

$$\begin{aligned}\int_{\phi=0}^{\pi/4} 4 \cdot \cos(\phi)\sin(\phi) &= \int_{\phi=0}^{\pi/4} 2 \cdot \sin(2\phi) \\ &= [-\cos(2\phi)]_{\phi=0}^{\pi/4} \\ &= 1\end{aligned}$$

Der *Flächeninhalt* A eines (kartesichen) Normalbereichs (A) lässt sich nach dem "Baukastenprinzip" aus *infinitesimal kleinen* rechteckigen *Flächenelementen* von Flächeninhalt $dA = dx\ dy$ zusammensetzen.

Flächeninhalt

- *Definitionsformel:*

$$A = \iint\limits_{(A)} dA$$

- In *kartesischen Koordinaten*:

$$A = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{y=f_o(x)} dy\ dx$$

- In *Polarkoordinaten*:

$$A = \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r=r_a(\phi)} r\ dr\ d\phi$$

Flächeninhalt

Anmerkungen

- Die *innere* Integration (nach der Variablen y) lässt sich beim Doppelintegral sofort ausführe. Wir erhalten die Darstellung:

$$A = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)] dx$$

- Auch in der *Polarkoordinatendarstellung* kann das Integral sofort bestimmt werden:

$$A = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r=r_a(\phi)} r \; dr \; d\phi \quad = \quad \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=r_i(\phi)}^{r=r_a(\phi)} d\phi$$

$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} [r_a^2(\phi) - r_i^2(\phi)] d\phi$$

Flächeninhalt

Beispiel

- Wir berechnen den *Flächeninhalt* einer *Mittelpunktellipse* mit der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ im 1. Quadrant mit Hilfe eines *Doppelintegrals*. Die *Integrationsgrenzen* lauten somit:

$$\begin{array}{ll} x\text{-}Integration: & \text{Von } y = 0 \text{ bis } y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \\ y\text{-}Integration: & \text{Von } x = 0 \text{ bis } x = a \end{array}$$

- Nach der Integralformel ist dann:

$$\begin{aligned} A = \int\limits_{x=0}^{a} \int\limits_{y=0}^{\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}} dy\ dx &= \int\limits_{x=0}^{a} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)\right] \\ &= \frac{\pi ab}{4} \end{aligned}$$

Flächeninhalt

- Der Flächeninhalt der *Ellipse* beträgt somit

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} dy\ dx \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

- *Definitionsformeln*:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} x \; dA, \qquad y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} y \; dA$$

- *In karstesischen Koordinaten*:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x \; dy \; dx, \qquad y_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y \; dy \; dx$$

- *In Polarkoordinaten*:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^2 \cos(\phi) dr \; d\phi$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^2 \sin(\phi) dr \; d\phi$$

Schwerpunkt einer Fläche

Anmerkungen

- In die Doppelintegralen ist die *innere* Integration nach y *sofort* durchführbar.

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x[f_o(x) - f_u(x)]dx$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b [f_o^2(x) - f_u^2(x)]dx$$

- Auch in der Polarkoordinatendarstellung lässt sich die *innere* Integration nach der Variablen r *sofort* ausführen:

$$x_S = \frac{1}{3A} \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} [r_a^3(\phi) - r_i^3(\phi)] \cos(\phi) d\phi$$

$$y_S = \frac{1}{3A} \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} [r_a^3(\phi) - r_i^3(\phi)] \sin(\phi) d\phi$$

Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)

Axiale und Polare Flächenmomente 2. Grades (Flächenträgheitsmomente)

- *Definitionsformeln*:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{(A)} y^2 dA, \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 dA \\ I_p &= I_x + I_y \end{aligned}$$

- *In kartesischen Koordinaten*:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y^2 \, dy \, dx \\ I_y &= \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x^2 \, dy \, dx \\ I_p &= \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} (x^2 + y^2) \, dy \, dx \end{aligned}$$

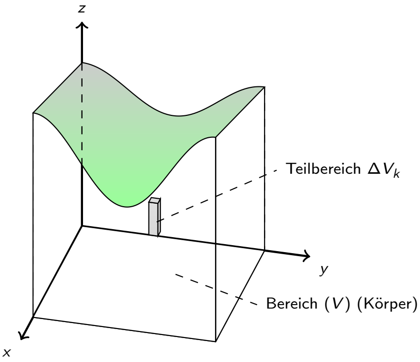
Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)

Axiale und Polare Flächenmomente 2. Grades (Flächenträgheitsmomente)

- *In Polarkoordinaten*:

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^3 \sin^2(\phi)\, dr\, d\phi \\
I_y &= \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^3 \cos^2(\phi)\, dr\, d\phi \\
I_r &= \int\limits_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int\limits_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^3\, dr\, d\phi
\end{aligned}
$$

Definition eines Dreifachintegrals



Zylindrischer Körper mit der "Deckelfläche" $z = f(x; y)$

$u = f(x; y; z)$ sei eine im räumlichen Bereich (V) definierte und stetige Funktion.

Den Bereich (auch *Körper* genannt) unterteilen wir zunächst in n Teilbereiche, mit dem k-ten Teilbereich vom Volumen ΔV_k werden wir uns nun eingehender befassen.

In diesem Teilbereich wählen wir eine *beliebigen* Punkt $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ aus, berechnen an dieser Stelle der *Funktionswert* $u_k = f(x_k; y_k; z_k)$ und bilden schliesslich das *Produkt* aus Funktionswert und Volumen: $f(x_k; y_k; z_k)\Delta V_k$.

Definition eines Dreifachintegrals

Definition

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta V_k \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

wird (falls er vorhanden ist) als *Dreifachintegral* bezeichnet und durch das symbol

$$\iiint\limits_{(V)} f(x; y; z)\, dV$$

gekennzeichnet.

Definition eines Dreifachintegrals

Anmerkungen

- Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:
  x, y, z: *Integrationsvariable*
  $f(x; y; z)$: *Integrandfunktion* (kurz: *Integrand*)
  dV: Volumendifferential ober Volumenelement
  (V): *Räumlicher Integrationsbereich* oder *Körper*
- Der Grenzwert ist vorhanden, wenn der Integrand $f(x; y; z)$ im Integrationsbereich *stetig* ist.

Berechnung eines Dreifachintegrals

Berechnung eines Dreifachintegrals unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Die Berechnung eines *Dreifachintegrals* $\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dV$ erfolgt durch *drei* nacheinander auszufürhende *gewöhnliche* Integrationen:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x;y;z)\,dV = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} f(x;y;z)\,dz\,dy\,dx$$

(V) : Zylindrischer Integrationsbereich.
Die einzehlnen Integrationsschritte erfolgen dabei von *innen nach aussen*, d.h. in der Reihenfolge z, y, x, wobei jeweils die übrigen Variablen als Parameter festgehalten werden.

Berechnung eines Dreifachintegrals

Anmerkung

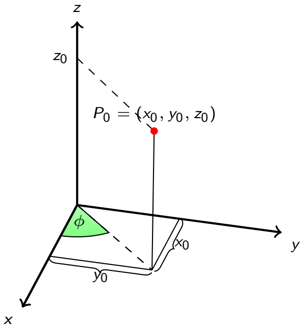
- Für $f(x; y; z) = 1$ beschreibt das dreifache Integral das *Volumen V* des zylindrischen Körpers (V):

$$\iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} dz\ dy\ dx$$

Beispiel

- $$\begin{aligned} \int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=0}^{x} \int\limits_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z\ dz\ dy\ dx &= \ldots \\ &= 1,004 \end{aligned}$$

Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten



Zylinderkoordinaten

Die *Zylinderkoordinaten* eines Raumpunktes P bestehen aus den *Polarkoordinaten* r und ϕ des Projektionspunktes P' in der x, y-Ebene und der (kartesischen) *Höhenkoordinate* z.

Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten

Berechnung eines Dreifachintegrals unter Verwendung von Zylinderkoordinaten

Beim Übergang von den *kartesischen* Raumkoordinaten $(x; y; z)$ zu den *Zylinderkoordinaten* $(r; \phi; z)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi), \quad z = z$$
$$dV = dx\ dy\ dz = r\ dz\ dr\ d\phi$$

Ein *Dreifachintegral* $\underset{(V)}{\iiint} dV$ transformiert sich dabei wie folgt:

$$\underset{(V)}{\iiint} f(x; y; z)\ dV = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} \int_{z=z_u(r;\phi)}^{z_o(r;\phi)} f(r \cdot \cos(\phi); r \cdot \sin(\phi); z)\ r\ dz\ dr\ d\phi$$

Die Integration erfolgt dabei in *drei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationsschritten in der Reihenfolge z, r, und ϕ.

Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten

Funktionsgleichung einer Rotationsfläche

Durch Rotation einer Kurve $z = f(x)$ um die z-Achse entsteht eine *Rotationsfläche* mit der Funktionsgleichung $z = f(r)$. Die *Gleichung* der Rotationsfläche erhält man dabei formal aus der Kurvengleichung mit Hilfe der Substitution $x \to r$

Anmerkung

- Bei einer Rotationsfläche $z = f(r)$ hängt die Höhenkoordinate z wegen der Rotationssymetrie *nur* von r, nicht aber von der Winkelkoordinate ϕ ab.

Volumen eines (zylindrischen) Körpers

Volumen eines (zylindrischen) Körpers

- *Definitionsformel*:

$$\iiint_{(V)} dV$$

- *In kartesischen Koordinaten*:

$$V = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} dz\ dy\ dx$$

- *In Zylinderkoordinaten*

$$\iiint_{(V)} f(x;y;z)\ dV = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} \int_{z=z_u(r;\phi)}^{z_o(r;\phi)} r\ dz\ dr\ d\phi$$

Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Definitionsformel der Schwerpunktkoordinaten:

$$x_S = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} x \; dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} y \; dV, \quad z_S = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} z \; dV$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} x \; dz \; dy \; dx \\
y_S &= \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} y \; dz \; dy \; dx \\
z_S &= \frac{1}{V} \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} z \; dz \; dy \; dx
\end{aligned}$$

Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers (Rotationsachse: z-Achse)

Unter Verwendung von *Zylinderkoordinaten* gilt für den auf der Rotationsachse (z-Achse) liegenden *Schwerpunkt* $S = (x_S; y_S; z_S)$:

$$x_S = 0, \quad y_S = 0, \quad z_S = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} z \; r \; dz \; dr \; d\phi$$

V: Rotationsvolumen (berechnet nach der Integralformel).

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

Definitionsformel:

$$J = \rho \cdot \iiint\limits_{(V)} r_A^2 \; dV$$

In kartesischen Koordinaten:

$$J = \rho \cdot \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int\limits_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} (x^2 + y^2) \; dz \; dy \; dx$$

Dabei bedeuten:

r_A: Senkrechter Abstand des Volumenelementes dV von der Bezugsachse A.
ρ: Konstante Dichte des Körpers