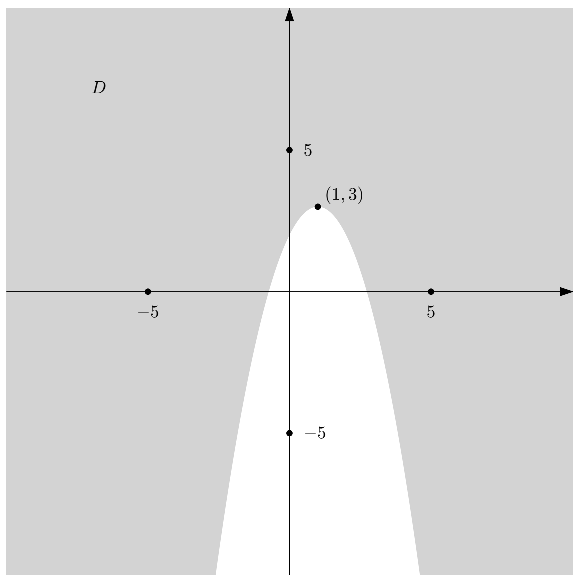
Musterlösungen zu Serie 2

1. **a)** Die Funktion ist nur für $(x-1)^2 + y - 3 > 0$ erklärt. Der Definitionsbereich D der Funktion wird also von der Parabel $y = -(x-1)^2 + 3$ begrenzt.



b) Es gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y - 3}, \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{(x-1)^2 + y - 3} - 1 = \frac{4 - (x-1)^2 - y}{(x-1)^2 + y - 3}, \end{aligned} \tag{1}$$

also insbesondere $f_x(0,4) = -1$ und $f_y(0,4) = -1/2$.

Die Tangentialebene ist durch

$$\begin{aligned} z &= f(0,4) + f_x(0,4)(x-0) + f_y(0,4)(y-4) \\ &= \ln 2 - 4 - x - \frac{y-4}{2} = \frac{\ln 4 - 4 - 2x - y}{2}, \end{aligned}$$

also $2x + y + 2z = \ln 4 - 4$ gegeben.

Bitte wenden!

c) In solchen Punkten (x, y) gilt $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Nach (1) folgt daraus

$$0 = x - 1 \qquad \text{und} \qquad 0 = 4 - (x-1)^2 - y.$$

Es gibt also nur den kritischen Punkt $(1, 4)$.

2. **a)** Es gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\, e^{y\ln(\sin x)} = y\,\frac{\cos x}{\sin x}\, e^{y\ln(\sin x)} = y\,(\sin(x))^{y-1}\cos(x), \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\, e^{y\ln(\sin x)} = \ln(\sin x)\, e^{y\ln(\sin x)} = (\sin(x))^y \ln(\sin(x)) \end{aligned}$$

und da $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ sind

$$f_x(\pi/6, 2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad f_y(\pi/6, 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Die lineare Näherung ist somit

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f\left(\frac{\pi}{6}, 2\right) + f_x(\pi/6, 2)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + f_y(\pi/6, 2)\,(y-2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\ln 2}{4}\,(y-2) \end{aligned}$$

b) Für $(x, y) = (62\pi/360, 1.98) = (\pi/6 + \pi/180, 2 + (-0.02))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(62\pi/360, 1.98) &\approx \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} + \frac{\ln 2}{4}\frac{2}{100} \\ &\approx \frac{1}{4} + \frac{7}{8}\frac{1}{60} + \frac{1}{8}\frac{2}{100} = \frac{641}{2400} \approx 0.27, \end{aligned}$$

wobei wir die Näherungen $\sqrt{3} \approx 7/4$, $\pi \approx 3$ und $\ln 2 \approx 1/2$ verwendet haben.

3. Für $f(x, y) = x^3 + 2y^3 + xy - 4$ gelten

$$f_x(x,y) = 3x^2 + y \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = x + 6y^2,$$

also insbesondere $f_x(2, -1) = 11$ und $f_y(2, -1) = 8$

a) Ja, da $f_y(2, -1) \neq 0$. Es gilt $y'(2) = -\dfrac{f_x(2,-1)}{f_y(2,-1)} = -\dfrac{11}{8}$.

b) Ja, da $f_x(2, -1) \neq 0$. Es gilt $x'(-1) = -\dfrac{f_y(2,-1)}{f_x(2,-1)} = -\dfrac{8}{11}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Die Einschränkungen

$$x \mapsto f(x,0) = 3\,x^4 \qquad \text{und} \qquad y \mapsto f(0,y) = y^2$$

von f auf die x- bzw. y-Achse nehmen offenbar ihr globales Minimum in 0 an.

Jede von der y-Achse verschiedene Gerade erfüllt $y = m\,x$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Einschränkung auf jede solche Gerade

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x,mx) = 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2 && \text{mit} \\ \varphi'(x) &= 12x^3 - 12mx^2 + 2m^2x && \text{und} \\ \varphi''(x) &= 36x^2 - 24mx + 2m^2 \end{aligned}$$

einen kritischen Wert in 0 annimmt, bei dem es sich wegen

$$\varphi''(0) = 2m^2 > 0 \qquad \text{für} \quad m \neq 0$$

um ein Minimum handelt.

Alternativ sieht man auch leicht direkt ein, dass wegen

$$\begin{aligned} f(x,m\,x) &= 3\,x^4 - 4\,m\,x^3 + m^2\,x^2 = x^2\left(3\,x^2 - 4\,m\,x + m^2\right) \\ &= x^2(x-m)(3\,x-m) \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (-\infty,0) \cup \left(0,\frac{m}{3}\right) \text{ falls } m > 0\,, \\ > 0 & \text{für } x \in \left(\frac{m}{3},0\right) \cup (0,\infty) \text{ falls } m < 0\,, \end{cases} \end{aligned}$$

jede solche Einschränkung im Ursprung ein lokales Minimum annimmt.

b) Es gilt

$$f(x, 3\,x^2/2) = 3\,x^4 - 6\,x^4 + \frac{9}{4}\,x^4 = -\frac{3}{4}\,x^4 < 0, \qquad x \neq 0.$$

Vom Ursprung abgesehen ist die Funktion f also auf den Koordinatenachsen stets positiv, auf der der Parabel $y = \frac{3}{2}\,x^2$ dagegen stets negativ. Somit nimmt f in jeder Umgebung des Ursprungs sowohl positive als auch negative Werte an.

Insbesondere ist der Ursprung keine Minimalstelle von f.

5. **a)** In einem kritischen Punkt (x,y) von f gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x + y - 2 = 0 && \text{und} \\ f_y(x,y) &= x - 2y - 2 = 0, \end{aligned}$$

also $x = y = -2$. Ferner gelten

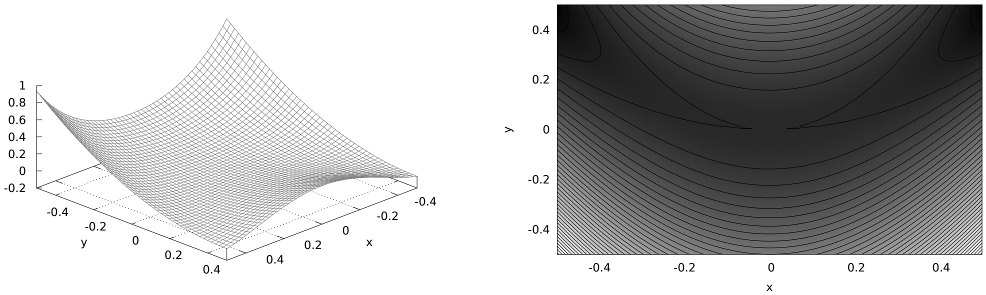
$$f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -2 \qquad \text{und} \qquad f_{xy}(x,y) = 1,$$

insbesondere also $f_{xx}(-2,-2) < 0$ und

$$f_{xx}(-2,-2)f_{yy}(-2,-2) - f_{xy}(-2,-2)^2 = 3 > 0.$$

Somit besitzt f in $(-2,-2)$ ein lokales Maximum.

Bitte wenden!



Graph und Niveaulinienportrait der Funktion f aus Aufgaben 4.

b) In einem kritischen Punkt (x, y) von g gelten

$$g_x(x,y) = 3x^2 + 3y = 3\left(x^2 + y\right) = 0 \qquad \text{und}$$
$$g_y(x,y) = 3y^2 + 3x = 3\left(y^2 + x\right) = 0,$$

also $x^4 + x = x(x^3 + 1) = 0$ und $y = -x^2$. Die kritischen Punkte der Funktion g sind also $(0, 0)$ und $(-1, -1)$. Ferner gelten

$$g_{xx}(x,y) = 6x, \quad g_{yy}(x,y) = 6y \qquad \text{und} \qquad g_{xy}(x,y) = 3.$$

Wegen $g_{xx}(0,0)g_{yy}(0,0) - g_{xy}(0,0)^2 = -9 < 0$ besitzt f im Ursprung einen Satteplunkt und wegen $g_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$ und

$$g_{xx}(-1,-1)g_{yy}(-1,-1) - g_{xy}(-1,-1)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

ein lokales Maximum im Punkt $(-1, -1)$.

c) In einem kritischen Punkt (x, y) von h gelten

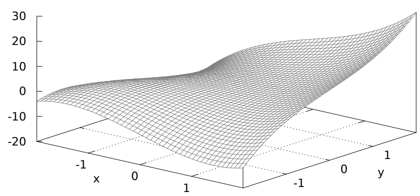
$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= 10xe^{-x^2-y^2} - 2x\left(5x^2 + 7y^2\right)e^{-x^2-y^2} \\ &= 2\left(5 - 5x^2 - 7y^2\right)xe^{-x^2-y^2} = 0 \qquad \text{und} \\ h_y(x,y) &= 14ye^{-x^2-y^2} - 2y\left(5x^2 + 7y^2\right)e^{-x^2-y^2} \\ &= 2\left(7 - 5x^2 - 7y^2\right)ye^{-x^2-y^2} = 0. \end{aligned}$$

Ist $x = 0$, so muss $y = 0$ oder $y = \pm 1$ sein. Ist $y = 0$, so muss $x = 0$ oder $x = \pm 1$ sein. Die Funktion hat also die kritischen Punkte

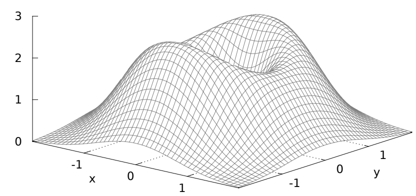
$$(0,0), \quad (0,1), \quad (0,-1), \quad (1,0) \quad \text{und} \quad (-1,0).$$

Da die Funktion für $(x, y) \neq (0, 0)$ stets positiv ist und im Ursprung verschwindet, nimmt sie dort offenbar ihr globales Minimum an.

Siehe nächstes Blatt!



Graph der Funktion g



Graph der Funktion h

Ferner gelten

$$
\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= \big((20x^2-50)x^2+(28x^2-14)y^2+10\big)\,e^{-x^2-y^2},\\
h_{yy}(x,y) &= \big((20y^2-10)x^2+(28y^2-70)y^2+14\big)\,e^{-x^2-y^2},\\
h_{xy}(x,y) &= \big(20x^2+28y^2-48\big)\,xye^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}
$$

In den kritischen Punkten gilt also $f_{xy}(x,y)=0$.

Ist $x=0$ und $y=\pm 1$, so sind

$$
\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= (10-14)\,e^{-1} = -4/e,\\
h_{yy}(x,y) &= ((28-70)+14)\,e^{-1} = -28/e.
\end{aligned}
$$

Also sind $(0,1)$ und $(0,-1)$ lokale Maximalstellen.

Ist $y=0$ und $x=\pm 1$, so sind

$$
\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= ((20-50)+10)\,e^{-1} = -20/e,\\
h_{yy}(x,y) &= (14-10)\,e^{-1} = 4/e.
\end{aligned}
$$

Also sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Sattelpunkte.

d) Es gelten

$$\varphi_x(x,y) = 2e^{2x}\cos y \qquad \text{und} \qquad \varphi_y(x,y) = -e^{2x}\sin y.$$

Wegen $e^x>0$ und $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $x\in\mathbb{R}$, besitzt φ also keine kritischen Punkte. Insbesondere nimmt φ keine lokalen Extrema an.