Musterlösungen zu Serie 3

1. **a)** Es sei $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. An einer Extremstelle (x, y) gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) - \lambda\varphi_x(x,y) &= y - 2\lambda x = 0, \\ f_y(x,y) - \lambda\varphi_y(x,y) &= x - 2\lambda y = 0, \\ \varphi(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$1 = x^2 + y^2 = 4\lambda^2 y^2 + 4\lambda^2 x^2 = 4\lambda^2 \left(x^2 + y^2\right) = 4\lambda^2,$$

also $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ und damit $x = \pm y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Die möglichen Extremstellen sind also

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Dass es sich dabei tatsächlich um Extremstellen handelt, folgt leicht mit dem Extremwertsatz für stetige Funktionen (Vorlesung): der Einheitskreis $\varphi(x, y) = 0$ um den Ursprung ist offenbar beschränkt und abgeschlossen, also nimmt f dort sowohl ein Minimum als auch ein Maximum an. Für die Stellen, in denen diese Extrema angenommen werden kommen aber nur die obigen Kandidaten in Frage.

Also nimmt f unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$

- das Maximum $\frac{1}{2}$ in den Punkten $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und
- das Minimum $-\frac{1}{2}$ in den Punkten $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ an.

Alternativ folgt dies auch direkt aus der elementaren *Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel*: Wegen

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy \geq 2xy$$

gilt $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ für $x, y \geq 0$ mit Gleichheit nur für $x = y$. **Allgemein** gilt

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

für beliebige $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ mit Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$.

Als **weitere Alternative** können wir auch die Funktionen

$$h_+(x) = x\sqrt{1-x^2} \qquad \text{und} \qquad h_-(x) = -x\sqrt{1-x^2}$$

auf $(-1, 1)$ betrachten. Wegen

$$h'_\pm(x) = \mp\frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad h''_\pm(x) = \mp\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \mp \frac{x^3}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nimmt die Funktion h_+ ihr Maximum bei $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und ihr Minimum bei $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, die Funktion h_- ihr Maximum bei $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und ihr Minimum bei $\frac{1}{\sqrt{2}}$ an.

Eine **weitere Alternative** besteht darin, den Einheitskreis, z.B. durch

$$\gamma : [0 : 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

zu parametrisieren. Nach der Kettenregel gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= -\sin^2 t + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1 \\ \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) &= -4 \sin t \cos t. \end{aligned}$$

Die Komposition $f \circ \gamma$ besitzt also die kritischen Punkte $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ und nimmt im ersten und dritten ein Maximum, im zweiten und vierten ein Minimum an.

b) Es sei $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$. An einer Extremstelle (x, y, z) gelten

$$\begin{aligned} g_x(x,y,z) - \lambda\varphi_x(x,y,z) &= yz - 2\lambda x = 0, \\ g_y(x,y,z) - \lambda\varphi_y(x,y,z) &= xz - 2\lambda y = 0, \\ g_z(x,y,z) - \lambda\varphi_z(x,y,z) &= xy - 2\lambda z = 0, \\ \varphi(x,y) &= x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die ersten drei Gleichungen mit x, y bzw. z, so folgt

$$xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2$$

Damit erhalten wir $\lambda(x^2 - y^2) = \lambda(x^2 - z^2) = \lambda(y^2 - z^2) = 0$, also

$$x^2 = y^2 = z^2 = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}.$$

denn wegen

$$3xyz = 2\lambda\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 6\lambda$$

erhalten wir für $\lambda = 0$ sicher keine globalen Extremstellen.

Siehe nächstes Blatt!

Die mglichen Extremstellen sind also

$$\begin{aligned}&(1,1,1), \quad (1,1,-1), \quad (1,-1,1), \quad (1,-1,-1),\\ &(-1,1,1), \quad (-1,1,-1), \quad (-1,-1,1), \quad (-1,-1,-1).\end{aligned}$$

Dass es sich um Extremstellen handelt, folgt analog zu **a)**: die Sphäre um den Ursprung mit Radius $\sqrt{3}$ ist beschränkt und abgeschlossen, so dass g dort sowohl ein Minimum als auch ein Maximum annimmt. Als mögliche Extremstellen kommen aber nur die obigen Kandidaten in Frage, also nimmt g auf $\varphi = 0$

- das Maximum 1 in den Punkten $(1, \pm 1, \pm 1)$ und $(-1, \pm 1, \mp 1)$ und
- das Minimum -1 in den Punkten $(1, \pm 1, \mp 1)$ und $(-1, \pm 1, \pm 1)$ an.

Alternativ können wir auch die Funktionen

$$h_+ = xy\sqrt{3 - x^2 - y^2} \qquad \text{und} \qquad h_- = xy\sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

auf $\{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 < 3 \,\}$ betrachten. Wegen

$$\frac{\partial h_\pm}{\partial x} = \pm\frac{(3 - 2x^2 - y^2)\, y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial h_\pm}{\partial y} = \pm\frac{(3 - x^2 - 2y^2)\, x}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}$$

besitzt diese, vom Ursprung abgesehen, die kritischen Punkte

$$(1, 1), \qquad (1, -1), \qquad (-1, 1) \qquad \text{und} \qquad (-1, -1),$$

und man sieht leicht ein, dass es sich jeweils um Extrema handelt.

c) Es seien

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= x + y + z - 5 \qquad\qquad \text{und}\\ \psi(x, y, z) &= xy + xz + yz - 8\end{aligned}$$

An einer Extremstelle (x, y, z) gelten

$$\begin{aligned}g_x(x, y, z) - \lambda\varphi_x(x, y, z) - \mu\psi_x(x, y, z) &= yz - \lambda - \mu(y + z) = 0,\\ g_y(x, y, z) - \lambda\varphi_y(x, y, z) - \mu\psi_y(x, y, z) &= xz - \lambda - \mu(x + z) = 0,\\ g_z(x, y, z) - \lambda\varphi_z(x, y, z) - \mu\psi_z(x, y, z) &= xy - \lambda - \mu(x + y) = 0,\\ \varphi(x, y, z) &= x + y + z - 5 = 0,\\ \psi(x, y, z) &= xy + xz + yz - 8 = 0.\end{aligned}$$

Durch Summieren der ersten drei Gleichungen folgt zunächst, dass wegen

$$0 = xy + xz + yz - 3\lambda - 2\mu(x + y + z) = 8 - 3\lambda - 10\mu,$$

wenigstens eine der Zahlen λ und μ von 0 verschieden ist.

Bitte wenden!

Multiplizieren wir die ersten drei Gleichungen mit x, y bzw. z, so folgt

$$xyz = \lambda x + \mu(xy - xz) = \lambda y + \mu(xy + yz) = \lambda z + \mu(xz - yz)$$

und daraus wiederum

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(y - x) + \mu(yz - xz) = (\lambda + \mu z)(y - x), \\ 0 &= \lambda(z - x) + \mu(zy - xy) = (\lambda + \mu y)(z - x), \\ 0 &= \lambda(z - y) + \mu(zx - yx) = (\lambda + \mu x)(z - y). \end{aligned}$$

Dabei kann nicht $x = y = z$ gelten, da sonst $x = y = z = \frac{5}{3}$ wäre, was der Nebenbedingung $\psi(x, y, z) = 0$ widerspricht. Angenommen

- $x = y$, dann ist $x = y = -\lambda/\mu$ und es gilt

  $$z = 5 - 2x \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2x(5 - 2x) = 8,$$

  also $x = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 2}{6}$, d.h. $x = 2$ oder $x = \frac{4}{3}$, und damit

  $$(x, y, z) = (2, 2, 1) \qquad \text{oder} \qquad (x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right),$$

- $x \neq y$, dann ist $z = -\lambda/\mu$ und es gilt
  - ⋆ entweder $y = z$, also $x = 5 - 2y$ und $y^2 + 2y(5 - 2y) = 8$ und damit

    $$(x, y, z) = (1, 2, 2) \qquad \text{oder} \qquad (x, y, z) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

  - ⋆ oder $x = z$, also $y = 5 - 2z$ und $z^2 + 2z(5 - 2z) = 8$ und damit

    $$(x, y, z) = (2, 1, 2) \qquad \text{oder} \qquad (x, y, z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Dabei handelt es sich jeweils tatsächlich um Extrema, denn wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\,(xy + xz + yz) = 25 - 16 = 9,$$

liegen alle in Betracht kommenden Punkte auf dem Schnittkreis der Sphäre um den Ursprung mit Radius 3 mit der Ebene $x + y + z = 5$. Dieser ist beschränkt und abgeschlossen, so dass g dort nach dem Extremwertsatz

- das Maximum $\frac{112}{27}$ in den Punkten

  $$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \qquad \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right), \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right),$$

- das Minimum 4 in den Punkten $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ und $(2, 2, 1)$ annimmt.

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Da die Menge A beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt f auf A einen grössten und einen kleinsten Wert an. Für kritische Punkte (x, y) im Innern von A gilt

$$0 = f_x(x, y) = 2x - 2 = f_y(x, y) = -2y + 4,$$

also $x = 1$ und $y = 2$. Wegen $f_{xx} = -f_{yy} = 2$ und $f_{xy} = 0$ handelt es sich bei dem kritischen Punkt $(1, 2)$ um einen Sattelpunkt.

Die Einschränkung der Funktion f auf die x-Achse

$$f(x, 0) = x^2 - 2x = x(x - 2), \qquad -2 \leq x \leq 2,$$

nimmt an den beiden Randpunkten $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ die Maxima 8 und 0, im Punkt $(1, 0)$ das Minimum -1 an. Die Einschränkung auf die Gerade $x = 2$

$$f(2, y) = -y^2 + 4y = y(4 - y), \qquad 0 \leq y \leq 4$$

nimmt an den Randpunkten $(2, 0)$ und $(2, 4)$ das Minimum 0, im Punkt $(2, 2)$ das Maximum 4 an. Die Einschränkung auf die Gerade $y = x + 2$,

$$f(x, x + 2) = 4 - 2x, \qquad -2 \leq x \leq 2,$$

nimmt keine inneren Extrema an.

Also nimmt f auf dem Bereich A

- das globale Maximum 8 im Punkt $(-2, 0)$ und
- das globale Minimum -1 im Punkt $(1, 0)$ an.

b) Da die Menge B beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt g auf B einen grössten und einen kleinsten Wert an. Für kritische Punkte (x, y) im Innern von B müssten

$$\begin{aligned} 0 &= g_x(x, y) = \cos x \cos y, \\ 0 &= g_y(x, y) = -\sin x \sin y \end{aligned}$$

gelten. Wegen $0 < x, y, x + y < \pi$ gibt es also keine solchen Punkte.

Da ferner die Funktion g auf B nicht negativ ist und die Einschränkungen von g auf die x- und die y-Achse verschwinden, so nimmt sie dort ihr globales Minimum und ihr globales Maximum auf dem Geradenstück $y = \pi - x$, $0 \leq x \leq \pi$, an. Die Einschränkung auf dieses ist durch

$$\varphi(x) = g(x, \pi - x) = \sin x \sin(\pi - x) = \sin^2 x, \qquad 0 \leq x \leq \pi,$$

gegeben und besitzt wegen

$$\varphi'(x) = \sin(2x) \qquad \text{und} \qquad \varphi''(x) = 2\cos(2x)$$

ein Maximum bei $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Bitte wenden!

Die Funktion g nimmat also auf dem Bereich B

- das globale Maximum 1 im Punkt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und
- das globale Minimum 0 in denjenigen Punkten des Randes an, die auf (wenigstens) einer der Koordinatenachsen liegen (d.h. für die $xy = 0$ gilt).

3. a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\iint_Q e^{x+y}\,dx\,dy \\
&\quad = \iint_Q e^x\,e^y\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 \int_0^1 e^x\,e^y\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 e^x\,dx \int_0^1 e^y\,dy \\
&\quad = e^x\big|_{x=0}^1\; e^y\big|_{y=0}^1 \\
&\quad = (e-1)^2\,.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy \\
&\quad = \iint_Q x^2\,\frac{1}{1+y^2}\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy \\
&\quad = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^1 \arctan y\big|_{y=0}^1 \\
&\quad = \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \left.\frac{1}{x+y+1}\right|_{x=0}^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{y+2}\,dy - \int_0^1 \frac{1}{y+1}\,dy \\
&= \ln(y+2)\big|_{y=0}^1 - \ln(y+1)\big|_{y=0}^1 = \ln\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

d) Hier ist es vorteilhaft, zuerst nach y zu integrieren:

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left.\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_{y=0}^1 dx.
\end{aligned}$$

Für $a > 0$ erhalten wir mit der Substitution $u = x + \sqrt{a+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int_{\sqrt{a}}^{1+\sqrt{a+1}} \frac{du}{u} = \ln\frac{1+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}.$$

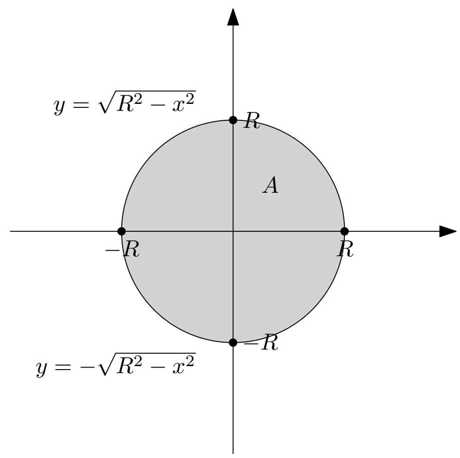
Siehe nächstes Blatt!

Damit folgt

$$\iint_Q \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$$
$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

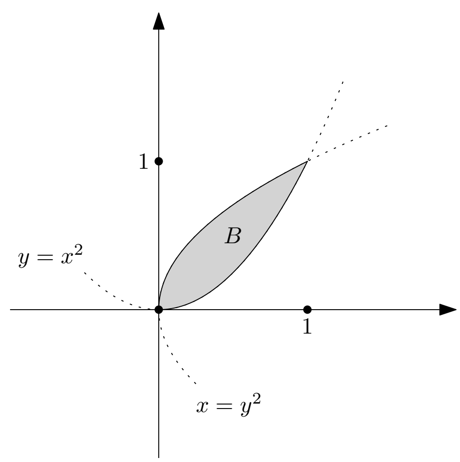
4. **a)** Es gilt (vgl. Figur)

$$\iint_A x^3y^2\,dx\,dy$$
$$= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x^3y^2\,dx\,dy$$
$$= \int_{-R}^{R} \frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y^2\,dy$$
$$= \int_{-R}^{R} 0\,y^2\,dy = 0.$$



b) Es gilt (vgl. Figur)

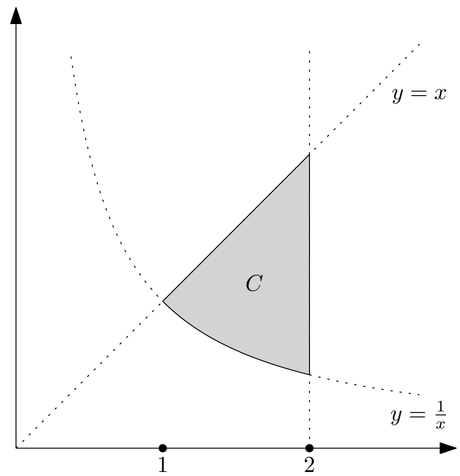
$$\iint_B (x^2+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+xy\right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}}\,dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{4\,y^{3/2}}{3} - \frac{y^6}{3} - y^3\right)\,dy$$
$$= \left(\frac{8\,y^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{y^7}{21} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{1} = \frac{33}{140}$$



Bitte wenden!

c) Es gilt (vgl. Figur)

$$\iint_C \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$$
$$= \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx$$
$$= \int_1^2 -\frac{x^2}{y}\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{x}\,dx$$
$$= \int_1^2 (x^3 - x)\,dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=1}^{2} = \frac{9}{4}$$



d) Es gilt (vgl. Figur)

$$\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^\pi \int_x^\pi \cos(x+y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^\pi \sin(x+y)\big|_{y=x}^{\pi}\,dx$$
$$= \int_0^\pi \left(-\sin x - \sin(2\,x)\right)\,dx$$
$$= \left(\cos x + \frac{\cos(2\,x)}{2}\right)\Big|_{x=0}^{\pi} = -2.$$