Dr. Ana Cannas da Silva

Musterlösungen zu Serie 5

1. **a)** Die Volumenhälfte $V/2$ entspricht dem Volumen unter dem Graphen von

$$D_{\frac{R}{2}}(0,0) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

über der Kreisscheibe

$$\begin{aligned} D_{\frac{R}{2}}(0,0) &= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x^2 + y^2 \le R^2/4 \,\} \\ &= \{\, (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le r \le R/2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \,\} \end{aligned}$$

mit Radius $R/2$ um den Ursprung.

In Polarkoordinaten ist daher

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint\limits_{D_{\frac{R}{2}}(0,0)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = 2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{R/2} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr\, d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{R/2} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = -\frac{4\pi}{3} \left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{R/2} \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(R^3 - \left(\frac{3R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{8 - 3\sqrt{3}}{6}\, \pi R^3. \end{aligned}$$

b) Die Volumenhälfte $V/2$ entspricht dem Volumen unter dem Graphen von

$$D_R(0,0) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2},$$

über der Kreisscheibe

$$D_R(0,0) = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < R^2 \,\}$$

mit Radius R um den Ursprung. Daher ist

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{D_R(0,0)} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx\, dy = 2 \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\, dy\, dx \\ &= 4 \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)\, dx = 4 \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=-R}^{R} = \frac{16\, R^3}{3}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) Die Volumenhälfte $V/2$ entspricht dem Volumen unter dem Graphen von

$$D_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

über der Kreisscheibe

$$\begin{aligned} D_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4}\right\} \\ &= \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 \le x^2+y^2 \le R\,x\,\} \\ &= \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le r\le R\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\} \end{aligned}$$

mit Radius $R/2$ um den Punkt $(R/2,0)$.

In Polarkoordinaten ist daher

$$\begin{aligned} V &= 2\iint\limits_{D_{\frac{R}{2}}\left(\frac{R}{2},0\right)} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{R\,\cos\varphi} \sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr\,d\varphi \\ &= -\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\,\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{2\,R^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-(1-\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\right)d\varphi \\ &= \frac{2\,R^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-|\sin\varphi|^3\right)\,d\varphi = \frac{4\,R^3}{3}\int_0^{\pi/2} d\varphi - \frac{4\,R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{4\,R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\cos^3\varphi - 3\,\cos\varphi}{3}\bigg|_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4\,R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right), \end{aligned}$$

wobei wir $\sin^3\varphi = \sin\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)$ benutzt haben.

2. Wir führen geeignete Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z)\mapsto(x, r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

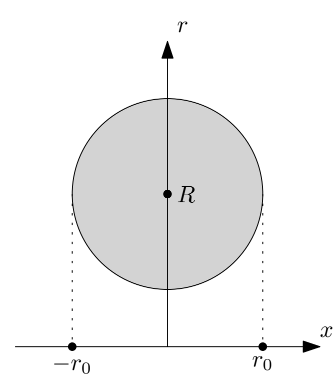
ein. In diesen Koordinaten lautet die Ungleichung des Rotationstorus

$$x^2+(r-R)^2\le r_0^2, \quad (\varphi\in[0,2\pi])$$

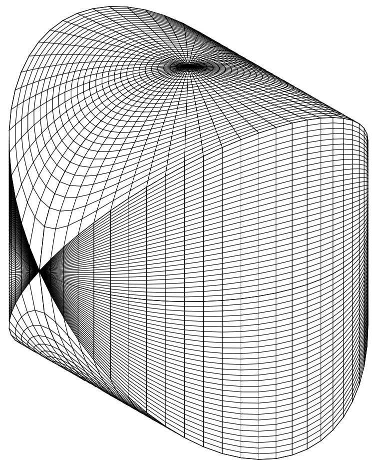
was äquivalent zur Ungleichung

$$R-\sqrt{r_0^2-x^2}\le r\le R+\sqrt{r_0^2-x^2}$$

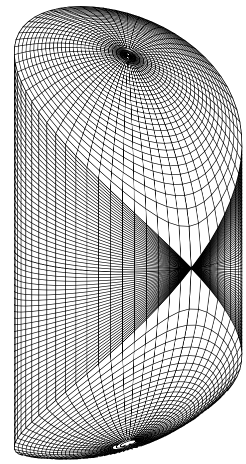
für $-r_0\le x\le r_0$ ist.



Siehe nächstes Blatt!



Der Durchdringungskörper in **1 b)**



Der Durchdringungskörper in **1 c)**

Für das Volumen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r_0}^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_{R-\sqrt{r_0^2-x^2}}^{R+\sqrt{r_0^2-x^2}} r\, dr\, d\varphi\, dx = 2\pi \int_{-r_0}^{r_0} \int_{R-\sqrt{r_0^2-x^2}}^{R+\sqrt{r_0^2-x^2}} \frac{r^2}{2}\, dr\, dx \\
&= \pi \int_{-r_0}^{r_0} \left(\left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) dx \\
&= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\pi R r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx \\
&= 4\pi R r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = 2\pi^2 R r^2. \qquad \text{(vgl. Serie 6 vom HS 12)}
\end{aligned}
$$

3. **a)** Wir führen Zylinderkoordinaten ein und betrachten oBdA den geraden Kreiszylinder, dessen Grundkreis in der x-y-Ebene liegt und sein Zentrum im Ursprung hat. Der Abstand eines Punktes $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ von der x-Achse ist

$$\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + z^2}. \qquad \text{(nach dem Satz des Pythagoras)}$$

Für das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(r^2 \sin^2 \varphi + z^2\right) r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&\qquad = H \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi + 2\pi \int_0^R r\, dr \int_0^H z^2\, dz \\
&\qquad = H\, \frac{R^4}{4}\, \pi + 2\pi\, \frac{R^2}{2} \frac{H^3}{3} = \pi R^2 H \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right),
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi\, d\varphi = \pi$ benutzt haben.

Bitte wenden!

b) Wir führen Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= R \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y &= R \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z &= R \cos\vartheta, \end{aligned}$$

ein und betrachten oBdA die Hohlkugel mit Zentrum im Ursprung. Der Abstand eines Punktes (x, y, z) von der z-Achse ist $R \sin\vartheta$, also ist

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} (R\,\sin\vartheta)^2\, R^2\, \sin\vartheta\, dR\, d\varphi\, d\vartheta = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} R^4\, dR \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta$$

das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse. Wegen

$$\int_{R_1}^{R_2} R^4\, dR = \left.\frac{R^5}{5}\right|_{R_1}^{R_2} = \frac{R_2^5}{5} - \frac{R_1^5}{5}$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3\vartheta\, d\vartheta &= \int_0^{\pi} \sin\vartheta \left(1 - \cos^2\vartheta\right) d\vartheta \\ &= \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta - \int_0^{\pi} \sin\vartheta \cos^2\vartheta\, d\vartheta \\ &= -\cos\vartheta\big|_0^{\pi} + \left.\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right|_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ergibt sich für dieses der Wert $\dfrac{8\pi\,(R_2^5 - R_1^5)}{15}$.