Dr. Ana Cannas da Silva

Musterlösungen zu Serie 6

1. Die Bogenlänge des Graphen einer differenzierbaren Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \text{ist durch} \qquad \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

gegeben. Insbesondere erhalten wir

a) für $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $a = 0$ und $b = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}\,x}\, dx \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{4}{9}\left(1 + \frac{9}{4}\,x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{13^{\frac{3}{2}} - 8}{27} \approx 1.44,\end{aligned}$$

b) für $f(x) = x^2$, $a = 0$ und $b = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \left(\frac{\operatorname{arsinh} x}{4} + \frac{x\sqrt{1 + x^2}}{4}\right)\Bigg|_0^2 \\ &= \frac{\operatorname{arsinh} 2}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right) + 2\sqrt{5}}{4} \approx 1.48\end{aligned}$$

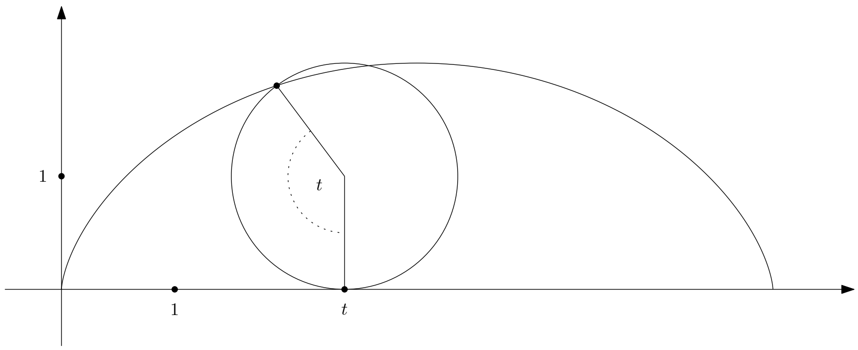
(vgl. Serie 4 vom HS 12).

2. **a)** Die Parametrisierung lässt sich wiefolgt aufteilen:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Die erste Komponente parametrisiert das Intervall $[0, 2\pi]$ auf der x-Achse, die zweite parametrisiert den Einheitskreis um $(0,1)$ beginnend mit dem Ursprung im Uhrzeigersinn. Die Superposition dieser beiden Wege beschreibt also, anschaulich gesprochen, die Kurve, die ein Punkt auf der Einheitskreisscheibe durchläuft, wenn diese auf der x-Achse ohne zu gleiten abrollt.

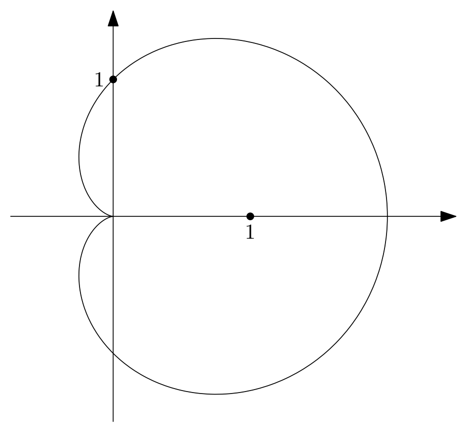
Bitte wenden!



Zu Aufgabe **2 a)**

b) Die Ableitung der Parametrisierung nach dem Kurvenparameter t ist

$$-\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1+\cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t\,(1+2\cos t) \\ \cos t\,(1+2\cos t) - 1 \end{pmatrix},$$



wobei wir

$$\cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$$

verwendet haben.

Für die Bogenlänge erhalten wir daraus zunächst

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin t\,(1+2\cos t) \\ \cos t\,(1+2\cos t) - 1 \end{pmatrix} \right| dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+2\cos t)^2 - 2\cos t\,(1+2\cos t) + 1}\, dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos t}\, dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \arccos u$ folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos t}\, dt &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}\sqrt{1-u}}\, du \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1+u}} = 2\sqrt{1+u}\Big|_{-1}^{1} = 2\sqrt{2},
\end{aligned}$$

also ergibt sich für die Bogenlänge $2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Es gelten

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (\delta\circ\gamma)(t) = e^{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t + ht} = e^{r^2+ht},$$

also

$$\int_\gamma \delta\, ds = \int_0^{2\pi} e^{r^2+ht}\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + h^2}\, dt = \sqrt{r^2+h^2}\, e^{r^2}\int_0^{2\pi} e^{ht}\, dt$$
$$= \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h}\, e^{r^2}\, e^{ht}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{\frac{r^2}{h^2}+1}\, e^{r^2}\left(e^{2\pi h}-1\right).$$

3. Die Fläche $\mathcal{B}$ kann beispielsweise mithilfe von Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

parametrisiert werden. Es gilt

$$z^2 = 4 - 4x^2 - 4y^2 = 4\left(1-r^2\right),$$

also $r = \sqrt{1-z^2/4}$ für $-2 \le z \le 2$. Eine Parametrisierung ist also durch

$$f(z,\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\,\cos\varphi \\ \sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\,\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \qquad -2\le z\le 2, \quad 0\le\varphi\le 2\pi,$$

gegeben. Für Punkte (x,y,z) auf $\mathcal{B}$ gilt

$$\sqrt{1+3x^2+3y^2} = \sqrt{1+3\left(1-\frac{z^2}{4}\right)} = \sqrt{4-\frac{3z^2}{4}} = 2\sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}.$$

Ferner gelten

$$f_z(z,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{-z}{4\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}\,\cos\varphi \\ \frac{-z}{4\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}\,\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_\varphi(z,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\,\sin\varphi \\ \sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\,\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$f_z(z,\varphi)\times f_\varphi(z,\varphi) = \left(-\sqrt{1-\tfrac{z^2}{4}}\,\cos\varphi, \quad -\sqrt{1-\tfrac{z^2}{4}}\,\sin\varphi, \quad -\tfrac{z}{4}\right)^T$$

und damit $|f_z(z,\varphi)\times f_\varphi(z,\varphi)| = \sqrt{1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^2}{16}} = \sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}$.

Bitte wenden!

Das Oberflächenintegral ist demnach

$$\iint_{\mathcal{B}} \sqrt{1+3x^2+3y^2}\, dA = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{2} 2\sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}\sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}\, dz\, d\varphi$$
$$= 4\pi \int_{-2}^{2} \left(1-\frac{3z^2}{16}\right) dz = 12\pi.$$

Alternativ lässt sich die Fläche $\mathcal{B}$ auch mithilfe von verallgemeinerten Kugelkoordinaten parametrisieren. Eine solche Parametrisierung ist z.B. durch

$$g(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ 2\cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi,$$

gegeben. Mit $\sqrt{1+3\,(x^2+y^2)} = \sqrt{1+3\sin^2\vartheta}$ und

$$g_\varphi(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad g_\vartheta(\varphi,\vartheta) \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ -2\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

also

$$|g_\varphi(\varphi,\vartheta) \times g_\vartheta(\varphi,\vartheta)|$$
$$= \sqrt{\left(-2\cos\varphi\sin^2\vartheta\right)^2 + \left(-2\sin\varphi\sin^2\vartheta\right)^2 + (-\sin\vartheta\cos\vartheta)^2}$$
$$= \sqrt{4\sin^4\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta} = \sin\vartheta\sqrt{4\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta} = \sin\vartheta\sqrt{1+3\sin^2\vartheta},$$

folgt ebenfalls

$$\iint_{\mathcal{B}} \sqrt{1+3x^2+3y^2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\left(1+3\sin^2\vartheta\right) d\vartheta\, d\varphi$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi} \left(\sin\vartheta + 3\sin^3\vartheta\right) d\vartheta = 12\pi.$$

4. **a)** Die naheliegendste Parametrisierung ergibt sich durch die Darstellung der Ebene $\mathcal{S}$ als Graph der Funktion $(x,y) \mapsto \sqrt{4+x^2+y^2}$. Damit ergibt sich

$$a(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{4+x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad |x| \le \sqrt{5},\ |y| \le \sqrt{5-x^2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Eine weitere Parametrisierung dieses Graphen ergibt sich mithilfe von Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, nämlich

$$b(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \sqrt{4+r^2} \end{pmatrix}, \quad 0 \le r \le \sqrt{5},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

oder (ebenfalls in Zylinderkoordinaten)

$$c(z,\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2-4}\cos\varphi \\ \sqrt{z^2-4}\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 2 \le z \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

oder (mit $r = 2\sinh u$ und $z = 2\cosh u$)

$$d(u,v) = \begin{pmatrix} 2\sinh u\cos v \\ 2\sinh u\sin v \\ 2\cosh u \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le \operatorname{arcosh}\frac{3}{2},\ 0 \le v \le 2\pi.$$

b) Für die erste Parametrisierung in **a)** gelten

$$(f\circ a)(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4+2x^2+2y^2}} \qquad \text{und}$$

$$|a_x(x,y) \times a_y(x,y)| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4+x^2+y^2}+1},$$

also

$$\begin{aligned}\int_S f\,dA &= \int_{-\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{5-x^2}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{4+2x^2+2y^2}} \sqrt{\frac{4+2x^2+2y^2}{4+x^2+y^2}}\,dx\,dy \\ &= \int_{-\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{5-x^2}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{dx\,dy}{\sqrt{4+x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Durch Einführen von Polarkoordinaten geht dieses Integral über in

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{4+r^2}} = 2\pi\int_0^{\sqrt{5}} \frac{r\,dr}{\sqrt{4+r^2}} = 2\pi\ \sqrt{4+r^2}\Big|_0^{\sqrt{5}} = 2\pi \tag{1}$$

Für die zweite Parametrisierung in **a)** gelten

$$(f\circ b)(r,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4+2r^2}} \qquad \text{und}$$

$$|b_r(r,\varphi) \times b_\varphi(r,\varphi)| = \sqrt{\frac{r^4}{4+r^2}+r^2},$$

was direkt auf das Integral (1) führt.

Bitte wenden!

Für die dritte Parametrisierung in **a)** gelten

$$(f \circ c)\,(z,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2z^2-4}} \quad \text{und} \quad |c_z(z,\varphi) \times c_\varphi(z,\varphi)| = \sqrt{2z^2-4},$$

also $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} f\,dA = \int_0^{2\pi}\int_2^3 1\,dz\,d\varphi = 2\pi.$

Für die vierte Parametrisierung in **a)** gelten

$$(f \circ d)\,(u,v) = \frac{1}{2\sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u}} \qquad \text{und}$$
$$|d_u(u,v) \times d_u(u,v)| = 4\sinh u\,\sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u},$$

also $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} f\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\operatorname{arcosh}\frac{3}{2}} 2\sinh u\,du\,d\varphi = 4\pi\,\cosh u\big|_0^{\operatorname{arcosh}\frac{3}{2}} = 2\pi.$

5. **a)** Für festgehaltene $v = v_0$ parametrisiert

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \cos u\,(2+\cos v_0) \\ \sin u\,(2+\cos v_0) \\ \sin v_0 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le u \le 2\pi,$$

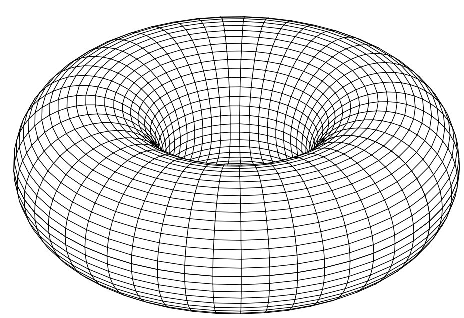
einen Kreis in der Ebene $z = \sin v_0$ um die z-Achse mit Radius $2 + \cos v_0$.

Für festgehaltene $u = u_0$ parametrisiert

$$v \mapsto \begin{pmatrix} \cos u_0\,(2+\cos v) \\ \sin u_0\,(2+\cos v) \\ \sin v \end{pmatrix}, \qquad 0 \le v \le 2\pi,$$

einen Einheitskreis mit Abstand 2 vom Ursprung und Mittelpunkt auf der x-y-Ebene, der in derjenigen Ebene durch die z-Achse liegt, die mit der x-z-Ebene den (orientierten) Winkel u_0 einschliesst.

Die Fläche $\mathcal{T}$ setzt sich also aus allen Kreisen zusammen, die parallel zur x-y-Ebene liegen, ihren Mittelpunkt auf der z-Achse haben und den Einheitskreis um den Punkt $(2,0,0)$ in der x-z-Ebene schneiden bzw. entsteht dadurch, dass dieser Kreis um die z-Achse rotiert wird. $\mathcal{T}$ ist also ein Torus.



Siehe nächstes Blatt!

b) Wir schreiben $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T$, also

$$x(u,v) = \cos u\,(2+\cos v)\,, \qquad y(u,v) = \sin u\,(2+\cos v)$$

und $z(u,v) = \sin v$. Dann gilt für $0 \le v \le \pi/2$ (wegen $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$)

$$\begin{aligned} x(u,v)^2 + y(u,v)^2 = (2+\cos v)^2 &= \left(2 + \sqrt{1-\sin^2 v}\right)^2 \\ &= \left(2 + \sqrt{1 - z(u,v)^2}\right)^2, \end{aligned}$$

also

$$\left(\sqrt{x(u,v)^2 + y(u,v)^2} - 2\right)^2 + z(u,v)^2 = 1.$$

Die Fläche $\mathcal{T}$ liegt also in der Niveaufläche zum Niveau 1 der Funktion

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2.$$

Die Niveaufläche ist offensichtlich ebenfalls rotationssymmetrisch zur z-Achse.

Gilt umgekehrt $g(x,y,z) = 1$, so liegt (x,y,z) auf einem zur x-y-Ebene orthogonalen Einheitskreis mit Abstand 2 vom Ursprung und Mittelpunkt auf der x-y-Ebene, liegt also auf der Torusfläche $\mathcal{T}$.

c) Es gelten

$$f_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u\,(2+\cos v) \\ \cos u\,(2+\cos v) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ -\sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

und daher

$$|f_u(u,v) \times f_v(u,v)| = \left| \begin{pmatrix} \cos u \cos v\,(2+\cos v) \\ \sin u \cos v\,(2+\cos v) \\ \sin v\,(2+\cos v) \end{pmatrix} \right| = 2 + \cos v,$$

wobei wir $\cos^2 u + \sin^2 u = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$ benutzt haben.

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2+\cos v)\, du\, dv = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} du\, dv + 0 = 8\pi^2.$$

als Flächeninhalt von $\mathcal{T}$.