Musterlösungen zu Serie 7

1. **a)** Die Funktion f ist offenbar auf der Menge

$$\mathbb{D} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \left(x^2-1\right) y > -1\right\}$$

erklärt. Diese besitzt die disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |x| > 1,\ y > \frac{1}{1-x^2}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |x| = 1\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ |x| < 1,\ y < \frac{1}{1-x^2}\right\},$$

es handelt sich also um die Vereinigung der Fläche über dem Graphen von

$$x \mapsto \frac{1}{1-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1],$$

derjenigen unter diesem Graphen für $x \in (0,1)$ und der durch

$$x = -1 \qquad \text{und} \qquad x = 1$$

bestimmten Geraden.

b) Der Gradient ist durch

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2-1)y+1} + 4 \\ \frac{x^2-1}{(x^2-1)y+1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere ist $\nabla f(1,1) = (6,0)^T$.

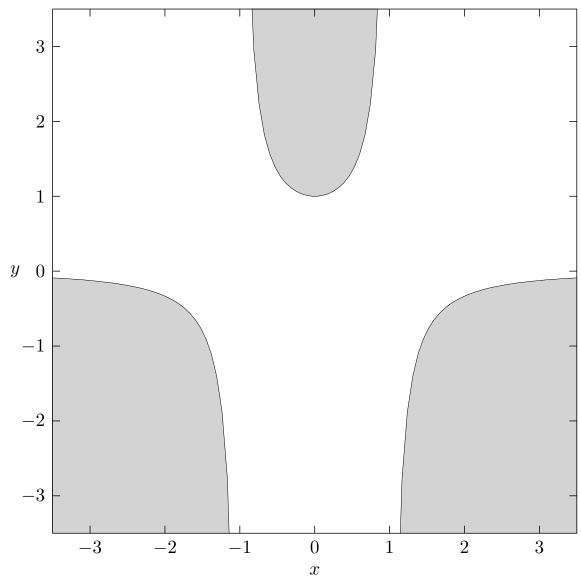
c) Wegen $f(1,1) = 4$ gehört die Niveaulinie von f durch $(1,1)$ zum Wert 4.

Da die Tangentialvektoren im Punkt $(1,1)$ an diese Linie diejenigen sind, die senkrecht zum Gradienten $\nabla f(1,1)$ stehen, es sich also um die Vektoren

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 6a$$

handelt, ist z.B. $(0,1)^T$ ein solcher Vektor.

Bitte wenden!



zu Aufgabe **1 a)**: $\mathbb{D}$ entspricht dem unschraffierten Bereich.

d) Der Graph von f kann als Niveaufläche von

$$h(x, y, z) = f(x, y) - z$$

zum Niveau 0 beschrieben werden. Es ist dann

$$\nabla h = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2-1)y+1} + 4 \\ \frac{x^2-1}{(x^2-1)y+1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

und da der Gradient in jedem Punkt senkrecht auf der Tangentialebene an die Niveaufläche in diesem Punkt steht, so steht der Vektor

$$\nabla h(1, 0, f(1, 0)) = \nabla h(1, 0, 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf der Tangentialebene zur Niveaufläche durch den fraglichen Punkt. Die Ebene enthält also alle Punkte (x, y, z) mit

$$4x - z = d \qquad \text{für ein } d \in \mathbb{R}.$$

Da sie insbesondere den Punkt $(1, 0, f(1, 0)) = (1, 0, 4)$ enthält, ist $d = 0$ also

$$4x - z = 0$$

die gesuchte Ebenengleichung.

Siehe nächstes Blatt!

2. **a)** Die Funktion ist für $v \neq 0$ und $\sin w \geq 0$, also auf

$$\mathbb{D} = \{\, (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, v \neq 0,\ 2k\pi \leq w \leq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,\}$$

erklärt.

b) Gradient von f ist

$$\nabla f(u,v,w) = \left(\frac{\sqrt{\sin w}}{v}, -\frac{u\sqrt{\sin w}}{v^2}, \frac{u \cos w}{2v\sqrt{\sin w}} \right)^T.$$

Insbesondere gilt im Punkt $p = (1,1,\pi/2)$

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,1,\pi/2) = (1,-1,0)^T.$$

c) Die Richtungsableitung von f in P in Richtung $\vec{v} = (2,2,1)^T$ ist

$$\left\langle \nabla f(P), \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle = \frac{1}{3}\langle (1,-1,0)^T, (2,2,1)^T \rangle = 0.$$

d) Allgemein ist die Richtungsableitung von f in P in Richtung $\vec{v}$ durch

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla f(P), \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right\rangle &= \cos\varphi \, |\nabla f(1,1,\pi/2)| \left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| \\ &= \cos\varphi \left| (1,-1,0)^T \right| = 2\cos\varphi \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\varphi = \angle(\nabla f(P), \vec{v})$ den Winkel zwischen dem Gradienten von f in P und dem Vektor $\vec{v}$ bezeichnet. Die Richtungsableitung nimmt also

- den grössten Wert 2 in Richtung des Gradienten

$$\vec{v} = \frac{1}{|\nabla f(P)|} \nabla f(P) = \frac{1}{2}(1,-1,0)^T \qquad \text{und}$$

- den kleinsten Wert -2 in der dem Gradienten entgegengesetzten Richtung

$$\vec{v} = -\frac{1}{|\nabla f(P)|} \nabla f(P) = \frac{1}{2}(-1,1,0)^T \qquad \text{an.}$$

3. Die Funktion W ist auf dem Gebiet

$$G := \{\, (x,t) \,|\, 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq t \,\}$$

definiert. Offensichtlich verschwindet W auf dem Rand von G, d.h. für $x = 0$, $x = a$ oder $t = 0$, und ist im Innern von G stets positiv. Die Maximalstelle, falls vorhanden, muss also im Innern von G liegen und ein kritischer Punkt sein.

Bitte wenden!

Es ist

$$\nabla W(x,t) = \begin{pmatrix} W_x(x,t) \\ W_t(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(a-x)t^2e^{-bt} - x^2t^2e^{-bt} \\ 2x^2(a-x)te^{-bt} - x^2(a-x)t^2be^{-bt} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (2(a-x)-x)\,xt^2e^{-bt} \\ (2(a-x)-bt(a-x))\,x^2te^{-bt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2a-3x)t \\ x(2-bt)(a-x) \end{pmatrix} xte^{-bt}.$$

In einem kritischen Punkt $(\tilde{x},\tilde{t})$ gilt $\nabla W(\tilde{x},\tilde{t}) = 0$.

Da x, t, $(a-x)$ und e^{-bt} im Innern von G stets positiv sind, folgt

$$2a - 3\tilde{x} = 0 \qquad \text{und} \qquad 2 - b\tilde{t} = 0,$$

also

$$\tilde{x} = \frac{2a}{3} \qquad \text{und} \qquad \tilde{t} = \frac{2}{b}.$$

Schliesslich folgt aus

$$W(x,t) \leq a^3 \frac{t^2}{e^{bt}} \to 0, \qquad t \to \infty,$$

für alle $0 \leq x \leq a$ und der Positivität von W im Innern von G, dass W ausserhalb einer beschränkten und abgeschlossenen Menge strikt kleiner als $W(\tilde{x},\tilde{t})$ sein muss. Der Wert $W(\tilde{x},\tilde{t})$ ist somit tatsächlich das globale Maximum.

4. Es gelten

$$\operatorname{rot} D(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{d}{dy}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{d}{dz}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{d}{dz}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{d}{dx}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{d}{dx}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{d}{dy}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{Q}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{-3yz+3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-3xz+3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-3xy+3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rot} H(x,y,z) = \frac{I}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 - \frac{d}{dz}\frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{d}{dz}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) - 0 \\ \frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{d}{dy}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\operatorname{div} D(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi}\frac{3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{Q}{4\pi}\frac{3\,(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0,$$
$$\operatorname{div} H(x,y,z) = \frac{I}{2\pi}\frac{2xy}{x^2+y^2} - \frac{I}{2\pi}\frac{2xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **a)** Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (1-t, 2t)^T$, $t \in [0,1]$, ergibt sich

$$\int_0^1 F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-1+t+4t)dt$$
$$= \left(-t + \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Alternativ: $F = \nabla\varphi$ mit $\varphi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ und $\varphi(B) - \varphi(A) = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$.

b) Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-2\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t \cos t\right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

c) Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t + 1, 2\sin t - 2)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\sin t + 2 \\ \cos t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 t - 2\sin t + 2\cos^2 t + 2\cos t\right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

d) Z.B. ergibt sich in **a)** mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (1-2t, 4t)^T$, $t \in [0, 1/2]$,

$$\int_0^{1/2} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_0^{1/2} \begin{pmatrix} 1-2t \\ 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} dt = \int_0^{1/2} (-2+4t+16t)dt$$
$$= \left(-2t + 10t^2\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{3}{2}, \qquad \text{wie zuvor.}$$