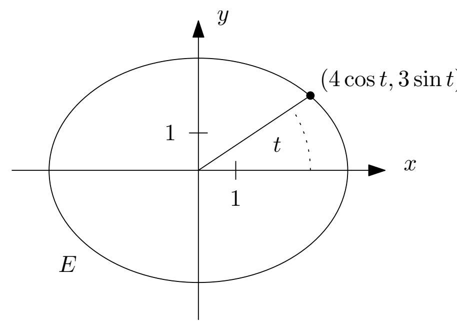
Musterlösungen zu Serie 10

1. **a)** Die Ellipse E wird z.B. durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 4\,\cos t \\ 3\,\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\,\pi,$$



parametrisiert.

Daher ist

$$\begin{aligned}\oint_E F\,d\vec{s} &= \int_0^{2\,\pi} F(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\,\pi} \begin{pmatrix} 12\,\cos t - 12\,\sin t \\ 16\,\cos t + 6\,\sin t \\ -36\,\sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4\,\sin t \\ 3\,\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\,\pi} \left(48\,\cos^2 t + 48\,\sin^2 t - 30\,\cos t \sin t\right) dt \\ &= 48 \int_0^{2\,\pi} dt - 30 \int_0^{2\,\pi} \cos t \sin t\,dt = 48\cdot 2\,\pi - 0 = 96\,\pi.\end{aligned}$$

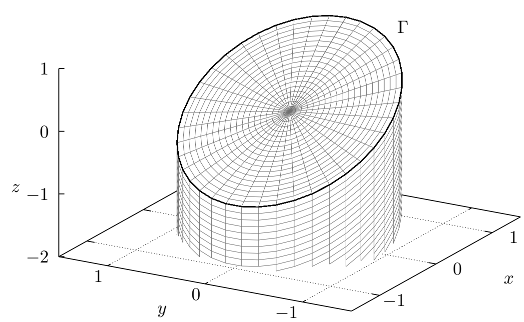
Ferner ist offenbar $\vec{n} = (0,0,1)^T$ der Einheitsnormalenvektor der von der positiv orientierten Ellipse E begrenzten orientierten Fläche Σ. Wegen

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -8\,y - (-6\,z) \\ 2 - 2\,z \\ 4 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,z - 8\,y \\ 2 - 2\,z \\ 8 \end{pmatrix}$$

gilt also $\oint_E F\,d\vec{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} F\cdot\vec{n}\,dA = 8\,\iint_\Sigma dA = 8\cdot 4\cdot 3\cdot\pi = 96\,\pi$.

b) Die Schnittkurve Γ wird z.B. durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$



parametrisiert.

Bitte wenden!

Dann gelten

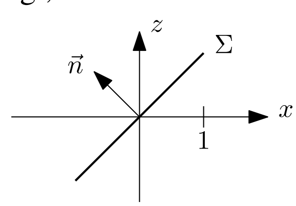
$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin^2 t \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

und also

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma F\, d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\varphi} \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_{t=0}^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Eine von Γ berandete Fläche ist z.B. die Schnittfläche Σ der $x = z$-Ebene mit dem Vollzylinder. Da diese in der $x = z$-Ebene liegt, ist

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



die Einheitsnormale von Σ, und da

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2y - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 2y \end{pmatrix} = -2y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

folgt $\oint_\Gamma F\, d\vec{s} = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dA = \int_\Sigma 0\, dA = 0$ auch mit dem Satz von Stokes.

c) Wir unterteilen den Weg in zwei Teilwege.

i) Der Weg, der die Punkte A und B geradlinig verbindet, ist etwa durch

$$\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Dann gilt

$$F(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^3 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Die Arbeit von F längs γ_1 ist also 0.

Siehe nächstes Blatt!

ii) Der zweite Weg

$$\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

mit

$$F\left(\gamma_2(t)\right) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3e^3 \\ \cos t + 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

verbindet die Punkte B und A auf dem Halbkreis mit Durchmesser $2 = \overline{AB}$ in der Halbebene $y = 3$, $z \ge 0$. Die Arbeit von F längs γ_2 ist

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \begin{pmatrix} -\sin t \\ 3e^3 \\ \cos t + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt &= \int_0^\pi \left(\sin^2 t + \cos^2 t + \cos t\right) dt \\ &= \int_0^\pi 1\, dt + \int_0^\pi \cos t\, dt = \pi. \end{aligned}$$

Der Einheitsnormalenvektor der von der fraglichen Kurve berandeten halben Kreisscheibe H ist offenbar $\vec{n} = (0,-1,0)^T$. Daher folgt

$$\iint_H \operatorname{rot} F \cdot \vec{n}\, dA = \iint_H \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dA = 2 \iint_H dA = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$$

auch mit dem Satz von Stokes.

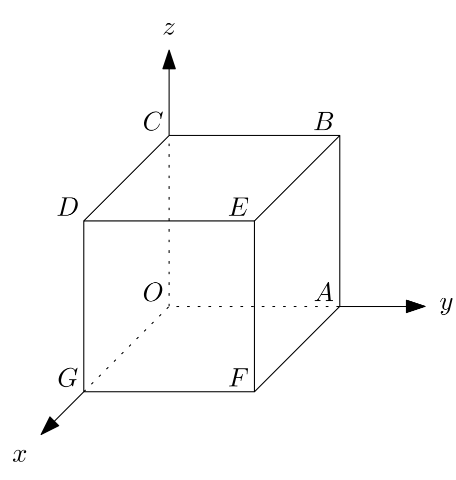
2. a) Wir bestimmen zunächst den Fluss aus dem Würfel W, indem wir die Flüsse durch dessen Seiten einzeln berechnen und diese addieren.

Die Einheitsnormalenvektoren sind

$$\vec{n}_{DEFG} = -\vec{n}_{ABCO} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n}_{ABEF} = -\vec{n}_{OGDC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n}_{BCDE} = -\vec{n}_{AFGO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Bitte wenden!

Daher sind

$$\iint_{DEFG} F\cdot\vec{n}_{DEFG}\,dA = \int_0^1\int_0^1 (2-z)\,dy\,dz = \frac{3}{2},$$
$$\iint_{ABCO} F\cdot\vec{n}_{ABCO}\,dA = \int_0^1\int_0^1 z\,dy\,dz = \frac{1}{2},$$
$$\iint_{ABEF} F\cdot\vec{n}_{ABEF}\,dA = \int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dz = \frac{1}{3},$$
$$\iint_{OGDC} F\cdot\vec{n}_{OGDC}\,dA = \int_0^1\int_0^1 0\,dx\,dz = 0,$$
$$\iint_{BCDE} F\cdot\vec{n}_{BCDE}\,dA = \int_0^1\int_0^1 (-x)\,dx\,dy = -\frac{1}{2},$$
$$\iint_{AFGO} F\cdot\vec{n}_{AFGO}\,dA = \int_0^1\int_0^1 0\,dx\,dy = 0,$$

und als Gesamtfluss ergibt sich $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$.

Da

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 2 + x^2 - 2\,x\,z,$$

folgt

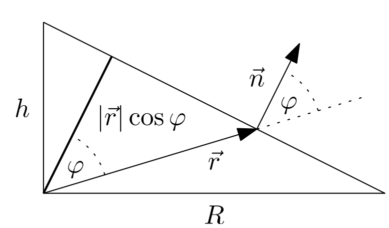
$$\begin{aligned}\iiint_W \operatorname{div} F\,dV &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(2+x^2-2\,x\,z\right)\,dx\,dy\,dz\\ &= 2+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{3}-z\right)\,dy\,dz\\ &= 2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{6}\end{aligned}$$

auch mit dem Satz von Gauss.

b) Offenbar verschwindet der Fluss des Radiusvektors durch die Grundfläche.

Wie man sich durch eine elementargeometrische Überlegung klarmacht, gilt auf der Mantelfläche M stets

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = \frac{R\,h}{\sqrt{R^2+h^2}},$$



wobei $\vec{n}$ die Einheitsnormale bezeichnet. Der Fluss aus dem Kegel K ist also

$$\iint_M \vec{r}\cdot\vec{n}\,dA = \frac{R\,h}{\sqrt{R^2+h^2}}\iint_M dA = \frac{R\,h}{\sqrt{R^2+h^2}}\,R\sqrt{R^2+h^2}\,\pi = R^2\,h\,\pi.$$

Siehe nächstes Blatt!

Da $\operatorname{div} r(x,y,z) = 1+1+1 = 3$, folgt

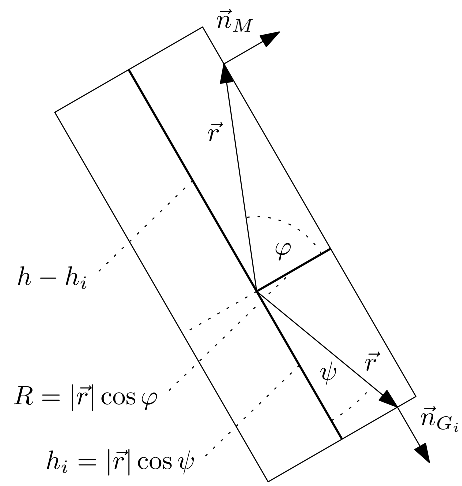
$$\iiint_K \operatorname{div} r \, dV = 3 \iiint_K dV = 3\,\frac{R^2\,h\,\pi}{3} = R^2\,h\,\pi$$

auch mit dem Satz von Gauss.

c) Haben die zwei Grundflächen G_1 und G_2 den Abstand h_1 bzw. $h_2 = h - h_1$ vom Ursprung, so gilt offenbar

$$\begin{aligned}\iint_{G_i} \vec{r}\cdot\vec{n}_{G_i}\,dA &= h_i \iint_{G_i} dA \\ &= R^2\,h_i\,\pi,\end{aligned}$$

$i = 1,2$, wobei $\vec{n}_{G_i}$ jeweils die Einheitsnormale bezeichnet.



Der Fluss durch den Mantel M mit der Einheitsnormalen $\vec{n}_M$ ist

$$\begin{aligned}\iint_M \vec{r}\cdot\vec{n}_M\,dA &= R \iint_M dA \\ &= 2\,R^2\,h\,\pi.\end{aligned}$$

Der Gesamtfluss durch den Kegel K ist also $3\,R^2\,h\,\pi$.

Da $\operatorname{div} r = 3$, folgt

$$\iiint_K \operatorname{div} r\,dV = 3 \iiint_K dV = 3\,R^2\,h\,\pi.$$

auch mit dem Satz von Gauss.

3. **a)** Das Integral

$$\oint_{S_r^1} H\cdot ds = \frac{I}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{I}{2\,\pi}\,2\,\pi = I \tag{1}$$

über den positiv orientierten Kreis $S_r^1 = \{\,(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2\,\}$ in der x-y-Ebene ist unabhängig von $r>0$ (vgl. Serie 8 **1 d)**).

Für einen beliebigen Kreis K, der die z-Achse nicht schneidet, unterscheiden wir die beiden folgenden Fälle:

i) K umläuft die z-Achse nicht. In diesem Fall berandet K eine Fläche Σ, die die z-Achse nicht schneidet, d.h. auf der H und somit auch $\operatorname{rot} H$ definiert ist. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\oint_K H\cdot ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot} H\cdot dA = \iint_\Sigma \vec{0}\cdot dA = 0,$$

also verschwindet die Arbeit längs einer solchen Kurve.

Bitte wenden!

ii) K umläuft die z-Achse. In diesem Fall gibt es stets eine Fläche Σ, deren Rand sich aus K und einem Kreis S_r^1 (für ein hinreichend kleines $r > 0$) zusammensetzt. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\oint_{S_r^1} H \cdot ds \mp \oint_K H \cdot ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot} H \cdot dA = \iint_\Sigma \vec{0} \cdot dA = 0,$$

also, wegen (1), entweder

- $\displaystyle\oint_K H \cdot ds = I,$ falls K positiv (wie S_r^1) orientiert ist, oder
- $\displaystyle\oint_K H \cdot ds = -I,$ falls K negativ (entgegengesetzt zu S_r^1) orientiert ist.

Bemerkung: Wegen (1) handelt es sich bei H insbesondere nicht um ein Gradientenfeld, da für solche Felder das Arbeitsintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet. Dies zeigt (vgl. die Bemerkung in Serie 8 **1 d)**), dass die notwendige Bedingung $\operatorname{rot} H = \vec{0}$ für die Existenz eines Potentials des Vektorfelds H im allgemeinen nicht hinreichend ist. Dagegen besitz H z.B. in

$$A = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x\,z \\ y\,z \\ -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential, d.h. $H = \operatorname{rot} A$.

b) Das Integral

$$\iint_{S_r^2} D \cdot n_{S_r^2}\, dA = \frac{Q}{4\pi r^2} \iint_{S_r^2} 1\, dA = \frac{Q}{4\pi r^2}\, 4\pi r^2 = Q \qquad (2)$$

über die Sphäre $S_r^2 = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \,\}$ mit der Normalen

$$n_{S_r^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ist unabhängig vom Radius $r > 0$, da auf S_r^2

$$\begin{aligned} D \cdot n_{S_r^2} &= \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{Q}{4\pi} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{Q}{4\pi} \frac{r^2}{r^4} = \frac{Q}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

und da $\displaystyle\iint_{S_r^2} 1\, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta = 4\pi r^2.$

Siehe nächstes Blatt!

In Analogie zu **a)** verschwindet der Fluss durch jede Fläche, die den Ursprung nicht umschliesst (nach dem Satz von Gauss, da das Vektorfeld D quellfrei ist).

Für eine beliebige Fläche Σ, die den Ursprung umschliesst, gibt es stets ein Gebiet G, dessen Rand sich aus Σ und S_r^2 (für ein hinreichend kleines $r > 0$) zusammensetzt. Nach dem Satz von Gauss gilt

$$\iint_{S_r^2} D \cdot n_{S_r^2}\, dA \mp \iint_{\Sigma} D \cdot n_{\Sigma}\, dA = \iiint_G \operatorname{div} D\, dV = \iiint_G 0\, dV = 0,$$

also, wegen (2), entweder

- $\displaystyle\iint_{\Sigma} D \cdot n_{\Sigma}\, dA = Q,$ falls die Normale n_Σ von Σ nach „aussen“ zeigt, d.h. falls die Fläche Σ wie die Sphäre S_r^2 orientiert ist, oder
- $\displaystyle\iint_{\Sigma} D \cdot n_{\Sigma}\, dA - Q,$ falls die Normale n_Σ von Σ nach „innen“ zeigt, d.h. falls die Fläche Σ entgegengesetzt zur Sphäre S_r^2 orientiert ist.

Bemerkung: Wegen (2) besitzt D kein Vektorpotential, da für solche Felder das Flussintegral über jede geschlossene Fläche (d.h. Fläche ohne Randkurven) verschwindet. Dies zeigt, dass die notwendige Bedingung $\operatorname{div} D = 0$ für die Existenz eines Vektorpotentials des Vektorfelds D im allgemeinen nicht hinreichend ist. Dagegen besitz D z.B. in der Funktion

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\,\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ein Potential.