D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 13
Dr. Ana Cannas da Silva

MC-Abschlusstest

Einsendeschluss: 14.6.2013 17:00 Uhr

Frage 1

Wie lautet der Gradient der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$?

○ $\nabla f(x,y) = x + y$

○ $\nabla f(x,y) = y$

○ $\nabla f(x,y) = (x,y)^T$

√ ○ $\nabla f(x,y) = (y,x)^T$

Der Gradient von f ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

Frage 2

Der Wert einer Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

○ des Gradienten.

○ orthogonal zum Gradienten.

√ ○ entgegengesetzt zum Gradienten.

○ der minimalen partiellen Ableitung.

Die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung des Einheitsvektors $\vec{v}$ ist

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(P) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(P + t\vec{v}) - f(P)}{t} = \langle \nabla f(P), \vec{v} \rangle \\ &= |\nabla f(P)|\,|\vec{v}| \cos\varphi = |\nabla f(P)| \cos\varphi, \end{aligned}$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi)$ den Winkel zwischen $\nabla f(P)$ und der Richtung von $\vec{v}$ bezeichnet. $\cos\varphi$ ist aber minimal für $\varphi = \pi$ und somit ist die Richtungsableitung minimal in die dem Gradienten entgegengesetzte Richtung $\vec{v} = -\frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$.

Frage 3

Die Richtungsableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x^2 + y + z^3$$

an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Vektors $(4, 4, 2)^T$ ist

○ $\frac{34}{3}$

○ 36

√ ○ 6

○ $(2, 1, 12)$

Der Betrag des Vektors $(4, 4, 2)^T$ ist $\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$; der zugehörige Einheitsvektor ist daher $\vec{v} = (4, 4, 2)^T/6 = (2, 2, 1)^T/3$. Der Gradient $\nabla f(x, y, z) = (2x, 1, 3z^2)^T$ hat im Punkt $(1, 2, 2)$ den Wert $(2, 1, 12)^T$. Somit ist die fragliche Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(1, 2, 2) = (2, 1, 12)^T \cdot (2, 2, 1)^T/3 = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 12 \cdot 1)/3 = 18/3 = 6$.

Frage 4

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

um den Punkt $(1, -1, 1)$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Man stellt

○ in x-Richtung eine Zunahme der Funktionswerte fest.

○ in y-Richtung eine Abnahme der Funktionswerte fest.

√ ○ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)^T$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

○ in Richtung $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ eine Zunahme der Funktionswerte fest.

Der Gradient von f in (x, y, z) ist

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{insbesondere ist} \quad \nabla f(1, -1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion nimmt also in x-Richtung zu, in y-Richtung ab. Ferner gelten

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-4}{\sqrt{3}} < 0, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0.$$

Somit ist nur die dritte Aussage falsch.

Frage 5

Es sei eine Fläche $\mathcal{F}$ einerseits durch die Parameterdarstellung $(u,v) \mapsto \varphi(u,v)$, andererseits durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ gegeben. Man betrachte einen festen Punkt $P_0 = \varphi(u_0, v_0)$ auf der Fläche $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist dann stets richtig? Die Vektoren $\nabla f(P_0)$ und $\varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)$

○ sind gleich.

√ ○ sind parallel.

○ stehen senkrecht aufeinander.

○ sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

Sowohl $\nabla f(P_0)$ als auch $\varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)$ stehen im Punkt P_0 normal zur Fläche $\mathcal{F}$ (bzw. zu der durch $\varphi_u(u_0,v_0)$ und $\varphi_v(u_0,v_0)$ aufgespannten Tangentialebene zu $\mathcal{F}$ in P_0). Sie sind daher kollinear (i.A. aber betragsmässig nicht gleich).

Frage 6

Die Fläche $\mathcal{F}$ sei durch die Parameterdarstellung $(u,v) \mapsto \varphi(u,v)$ gegeben. Der Vektor $n(u,v)$ bezeichne einen Normaleneinheitsvektor zu $\mathcal{F}$, $P_0 = \varphi(u_0,v_0)$ sei ein Punkt auf der Fläche $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist i.A. **falsch**?

√ ○ $n(u_0,v_0) = \pm\varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)$

○ Der Vektor $\varphi_u(u_0,v_0)$ liegt in einer Tangentialebene zu $\mathcal{F}$ im Punkt P_0.

○ Die Tangentialebene zur Fläche $\mathcal{F}$ im Punkt P_0 wird aufgespannt durch die beiden Vektoren $\varphi_u(u_0,v_0)$ und $\varphi_v(u_0,v_0)$.

○ Der Vektor $\varphi_u(u_0,v_0)$ ist tangential an die u-Linie, die durch P_0 geht.

Die Vektoren $\pm\varphi_u(u_0,v_0) \times \varphi_v(u_0,v_0)$ sind zwar orthogonal zu $\mathcal{F}$ in P_0, haben i.A. aber nicht die Länge 1, d.h. sind keine Normaleneinheitsvektoren zu $\mathcal{F}$ in P_0.

Frage 7

Welche der folgenden Kurven ist die längste?

√ ○ Der Graph der Funktion $g_1 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 6x$.

○ Der Graph der Funktion $g_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2$.

○ Der Graph der Funktion $g_3 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3$.

○ Der Graph der Funktion $g_4 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$.

Wir parametrisieren die Graphen g_i, $i = 1, \dots, 4$, durch

$$\vec{r}_i(x) = (x, g_i(x))^T, \qquad x \in [0,1].$$

Die Kurvenlänge L_i des Graphen g_i, $i = 1, \dots, 4$, ist somit

$$L_i = \int_0^1 \left|\vec{r}\,'(x)\right| \, dx \int_0^1 \sqrt{1 + |g_i'(x)|^2} \, dx$$

Wir berechnen: $g_1'(x) = 6$, $g_2'(x) = 6x$, $g_3'(x) = 6x^2$ und $g_4'(x) = 4x^3$.

Für $x \in [0,1]$ gilt aber $1 \geq x \geq x^2 \geq x^3 \geq 0$ und somit

$$|g_1'(x)| = 6 \geq 6x = |g_2'(x)| \geq |g_3'(x)| = 6x^2 \geq 4x^2 \geq 4x^3 = |g_4'(x)|$$

Also ist das Integral für $i = 1$ am grössten.

Frage 8

Das skalare Linienintegral

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \; |\gamma'(t)| \; dt$$

über eine Kurve C parametrisiert durch $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$

○ hängt wesentlich von der gewählten Parametrisierung γ der Kurve C ab.

○ hängt von der Länge und der Orientierung des Intervalls $[a,b]$, darüber hinaus aber nicht von der gewählten Parametrisierung γ der Kurve C ab.

○ hängt von der durch γ induzierten Orientierung der Kurve C, darüber hinaus aber nicht von der gewählten Parametrisierung der Kurve ab.

√ ○ ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung γ der Kurve C.

Die richtige Antwort ist (d). Dies folgt aus der Substitutionsformel.

Frage 9

Die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$$

sei mit einer Masse der Dichte $\delta(x,y,z) = 2z$ belegt.

Die Gesamtmasse der Fläche beträgt

- ◯ 0.
- ◯ π.
- √ ◯ 2π.
- ◯ 4π.

Wir parametrisieren $\mathcal{F}$ durch

$$\vec{p}(r,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \sqrt{1-r^2}\right), \qquad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{p}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{p}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r}\vec{p}(r,\varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{p}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{1-r^2}} \\ \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}} \\ r \end{pmatrix},$$

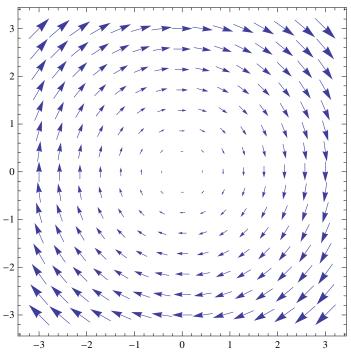
also

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial r}\vec{p}(r,\varphi) \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{p}(r,\varphi)\right| &= \sqrt{\frac{r^4\cos^2\varphi}{1-r^2} + \frac{r^4\sin^2\varphi}{1-r^2} + r^2} \\ &= \sqrt{\frac{r^4}{1-r^2} + r^2} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}. \end{aligned}$$

und somit $\displaystyle\iint_{\mathcal{F}} \delta\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sqrt{1-r^2}\,\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^1 2r\,dr = 2\pi.$

Frage 10

Es sei $\vec{F}$ das in folgender Abbildung dargestellte Vektorfeld:



Ferner seien

- C_1 die gerade Verbindungsstrecke von $(-3,-3)$ nach $(-3,3)$ und
- C_2 der entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreis vom Radius 2 um den Koordinatenursprung.

Dann gilt:

○ Beide Integrale $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ sind positiv.

○ Beide Integrale $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ sind negativ.

√ ○ Das Integral $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist positiv, das Integral $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist negativ.

○ Das Integral $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist negativ, das Integral $\int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot \vec{ds}$ ist positiv.

Das Integral $\int_{C_i} \vec{F} \cdot \vec{ds}$, $i = 1, 2$, ist definiert als $\int_a^b \vec{F}(\gamma_i(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma_i}}(t)\, dt$, wobei

$$\vec{\gamma_i} : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \qquad i = 1, 2,$$

eine Parametrisierung von C_i ist. Für die Integranden gilt

$$\vec{F}(\gamma_i(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma_i}}(t) = \left|\vec{F}(\gamma_i(t))\right| \left|\dot{\vec{\gamma_i}}(t)\right| \cos\varphi_i,$$

wobei φ_i den Winkel zwischen $\vec{F}(\gamma_i(t))$ und $\dot{\vec{\gamma_i}}(t)$ bezeichnet. Dieser ist

- entlang der Kurve C_1 stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$, so dass $\cos\varphi_1 > 0$, während
- entlang der Kurve C_2 das Vektorfeld und der Tangentialvektor stets in die entgegengestzte Richtung weisen, so dass $\varphi_2 = \pi$ und also $\cos\varphi_2 = -1 < 0$.

Frage 11

Die Arbeit A eines Vektorfeldes $\vec{F}$ längs des Geradenstücks von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, -1, -1)$ sei 5. Welches Resultat erhält man, wenn man die Arbeit B von $\vec{F}$ längs des Geradenstücks von $(-1, -1, -1)$ nach $(1, 0, 0)$ berechnet?

- ○ Die Arbeit B beträgt 0.
- √ ○ Die Arbeit B beträgt -5.
- ○ Die Arbeit B beträgt ebenfalls 5.
- ○ Die Arbeit B lässt sich aus den Angaben nicht berechnen.

Frage 12

Es sei $\vec{F}(x, y) = (xy, y - x)^T$. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

Die von $\vec{F}$ verrichtete Arbeit vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(1, 1)$

- ○ entlang der Kurve $y = x$ ist $< \frac{1}{2}$.

  Mit der Parametrisierung $t \mapsto (t, t)^T$, $0 \le t \le 1$, ergibt sich

  $$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \, dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

- ○ entlang der Kurve $y = x^2$ ist $< \frac{1}{10}$.

  Mit der Parametrisierung $t \mapsto (t, t^2)^T$, $0 \le t \le 1$, ergibt sich

  $$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,t \end{pmatrix} \, dt = \int_0^1 \left(t^3 + 2\,t^3 - 2\,t^2\right) \, dt = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} < \frac{1}{10}.$$

- ○ entlang der Kurve $y^2 = x$ ist $> \frac{1}{2}$.

  Mit der Parametrisierung $t \mapsto (t^2, t)^T$, $0 \le t \le 1$, ergibt sich

  $$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ t - t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,t \\ 1 \end{pmatrix} \, dt = \int_0^1 \left(2\,t^4 - t^2 + t\right) \, dt = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{30} > \frac{1}{2}.$$

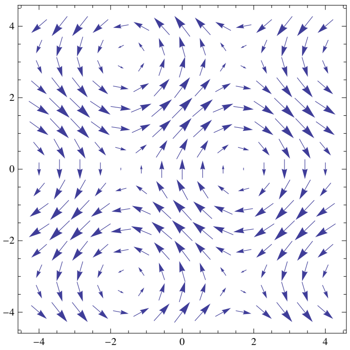
- √ ○ entlang der Kurve $y = x^3$ ist $< -\frac{1}{10}$.

  Mit der Parametrisierung $t \mapsto (t, t^3)^T$, $0 \le t \le 1$, ergibt sich

  $$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3\,t^2 \end{pmatrix} \, dt = \int_0^1 \left(t^4 + 3\,t^5 - 3\,t^3\right) \, dt = \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{20}.$$

Frage 13

Es sei $\vec{F}$ das in folgender Abbildung dargestellte Vektorfeld:



Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ.

○ Das Vektorfeld $\vec{F}$ besitzt ein Potential.

○ Das Vektorfeld $\vec{F}$ besitzt zwar kein Potential, aber es gilt

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{s} = 0$$

entlang jedes *geschlossenen* Wegs C.

√ ○ Keine der obigen Aussagen.

Man findet leicht eine geschlossene Kurve C (z.B. einen Kreis um den Punkt $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$), so dass $\oint_C \vec{F}\, d\vec{s} \neq 0$. Insbesondere ist das Vektorfeld also nicht konservativ und besitzt erst recht kein Potential. Daher ist (d) die richtige Antwort.

Frage 14

Welches der folgenden Vektorfelder $\vec{F}$ besitzt ein Potential?

○ $\vec{F}(x, y) = (x - y,\, x - y)^T$

○ $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y,\, x^3 + 2xy)^T$

√ ○ $\vec{F}(x, y) = (x^3 + 2xy,\, x^2 - y)^T$

○ $\vec{F}(x, y) = (x^3 - xy^2,\, x^2y - y^5)^T$

Ein (hinreichend reguläres) Vektorfeld $\vec{F} = (F_1, F_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ besitzt ein Potential genau dann, wenn $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ist. Diese partiellen Ableitungen sind im Fall (a) gleich $-1 \neq 1$, im Fall (b) gleich $-1 \neq 3x^2 + 2y$, im Fall (c) gleich $2x = 2x$, und im Fall (d) gleich $-2xy \neq 2xy$. Also lautet die richtige Antwort (c). Das zugehörige Potential ist in diesem Fall gleich $\frac{x^4}{4} + x^2y - \frac{y^2}{2} + c$ für eine beliebige Konstante c.

Frage 15

Für welche Konstante a ist das Vektorfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\ln\left(1+x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)^\top$$

von der Form $\vec{F}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$ für eine gewisse Funktion φ?

○ $a = -1/2$.

√ ○ $a = 1/2$.

○ $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

○ Es gibt keine solche Konstante a, da der Definitionsbereich des Vektorfeldes $\vec{F}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Ein solches Vektorfeld ist notwendigerweise wirbelfrei. Aus

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ y-2ay \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt $1-2a=0$, also $a=\frac{1}{2}$. Da der Definitionsbereich von F der ganze Raum $\mathbb{R}^3$ ist, ist also F für $a=\frac{1}{2}$ ein Potentialfeld. Für ein Potential φ gilt dann

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int \ln(1+x^2)\,dx + \frac{1}{2}xy^2 + C(y,z) \\ &= \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C(x,z) = \frac{z^4}{4} + C(x,y),\end{aligned}$$

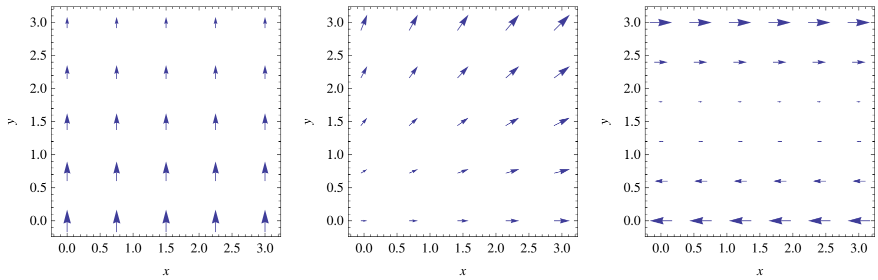
also ist

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int \ln(1+x^2)\,dx + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{z^4}{4} \\ &= x\log(1+x^2) + 2(\arctan x - x) + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{z^4}{4} + C\end{aligned}$$

für $C\in\mathbb{R}$ ein Potential.

Frage 16

Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils ein dreidimensionales Vektorfeld $\vec{F}$ in der x-y-Ebene. Die z-Komponente ist 0. Die Vektorfelder soll in allen dazu parallelen Ebenen identisch aussehen, d.h. $\vec{F}$ soll jeweils unabhängig von z und seine z-Komponente konstant gleich 0 sein.



Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ○ Alle drei Felder sind wirbelfrei.
- ○ Genau eines der Felder ist wirbelfrei.
- ○ Alle drei Felder sind quellenfrei.
- √ ○ Genau eines der Felder ist quellenfrei.

Wir schreiben jeweils $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)^T$.

Linkes Bild:

Die Pfeile verlaufen vertikal, also gilt $F_1 = 0$ und somit $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$.
Die y-Komponente bleibt von links nach rechts konstant, also gilt $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$.
Von unten nach oben nimmt die y-Komponente ab, also gilt $\frac{\partial F_2}{\partial y} < 0$.
Demnach gelten $\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,0)^T$ und $\operatorname{div}\vec{F} < 0$.

Mittleres Bild:

Die x-Komponente nimmt von links nach rechts zu, also gilt $\frac{\partial F_1}{\partial x} > 0$.
Die x-Komponente bleibt von unten nach oben konstant, also gilt $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$.
Die y-Komponente bleibt von links nach rechts konstant, also gilt $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$.
Die y-Komponente nimmt von unten nach oben zu, also gilt $\frac{\partial F_2}{\partial y} > 0$.
Demnach gelten $\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,0)^T$ und $\operatorname{div}\vec{F} > 0$.

Rechtes Bild:

Die x-Komponente bleibt von links nach rechts konstant, also gilt $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0$.
Die x-Komponente nimmt von unten nach oben zu, also gilt $\frac{\partial F_1}{\partial y} > 0$.
Die Pfeile verlaufen horizontal, also gilt $F_2 = 0$ und somit $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$.
Demnach gelten $\operatorname{rot}\vec{F} \neq (0,0,0)^T$ und $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.
$\operatorname{rot}\vec{F}$ zeigt in die Zeichenebene, d.h. Richtung $(0,0,-1)^T$.

Frage 17

Es sei f eine skalare Funktion, $\vec{F}$ ein Vektorfeld.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

√ ◯ $\operatorname{div} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial z} \right)$.

◯ $\operatorname{div} \nabla f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

◯ $\operatorname{div} \left(f\vec{F} \right) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F}$.

◯ $\operatorname{div} \operatorname{rot} \left(\nabla f \times \vec{F} \right) = 0$.

Frage 18

Es sei C die positiv orientierte Randkurve eines ebenen Gebiets G.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$.

√ ◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

◯ Der Flächeninhalt von G ist $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ mit $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - 4y + 2 \\ 2xy - 3x + 1 \end{pmatrix}$.

Nach dem Satz von Green ist

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iint_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

Der Wert des Umlaufintegrals $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ entspricht also dem Flächeninhalt von G, wenn das Vektorfeld $\vec{F}$ der Bedingung $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ genügt.

Frage 19

Die Arbeit, des Vektorfelds

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2+z^2, 4y-z, 2xz+2y\right)^T$$

entlang des positiv orientierten Einheitskreises in der (y,z)-Ebene ist

- ◯ π.
- √ ◯ 3π.
- ◯ $-\pi$.
- ◯ -3π.

Sei E die Einheitskreisscheibe in der (y,z)–Ebene mit Rand $\Gamma = \partial E$. Wir berechnen

$$\operatorname{rot} \vec{F}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 2z-2z \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf E mit dem Γ eine Rechtsschraube bildet, ist $(1,0,0)$. Nach dem Satz von Stokes ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_E \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_E \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; dA = 3 \underbrace{\iint_E dA}_{\text{Fläche von } E \,=\, \pi} = 3\pi.$$

Damit ist b) die richtige Antwort.

Frage 20

Sei $\mathcal{O}$ die Oberfläche eines beschränkten Körpers mit Volumens V. Die Fläche sei so orientiert, dass die Flächennormale nach aussen zeigt. Ferner seien

$\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)^T$	der Radiusvektor und
$\Phi = \iint_{\mathcal{O}} \vec{r} \cdot d\vec{A}$	der Fluss des Radiusvektors durch $\mathcal{O}$.

Wie gross ist der Fluss $\tilde{\Phi}$ des Radiusvektors $\vec{r}$ durch eine gleich orientierte Oberfläche $\tilde{\mathcal{O}}$ eines Körpers mit dem doppelten Volumen $2V$?

- √ ◯ Der Fluss ist doppelt so gross, d.h. $\tilde{\Phi} = 2\Phi$.
- ◯ Der Fluss ist das Quadrat desjenigen durch $\mathcal{O}$, d.h. $\tilde{\Phi} = \Phi^2$.
- ◯ Der Fluss ist die dritte Potenz desjenigen durch $\mathcal{O}$, d.h. $\tilde{\Phi} = \Phi^3$.
- ◯ Das lässt sich nicht sagen ohne $\mathcal{O}$ und $\tilde{\mathcal{O}}$ explizit zu kennen.

Wegen $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ folgt aus dem Satz von Gauss

$$\Phi = \iint_{\mathcal{O}} \vec{r} \cdot d\vec{A} = 3V \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{\Phi} = \iint_{\tilde{\mathcal{O}}} \vec{r} \cdot d\vec{A} = 3\,(2V) = 6V.$$

Der Fluss durch $\tilde{\mathcal{O}}$ ist also doppelt so gross.