ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

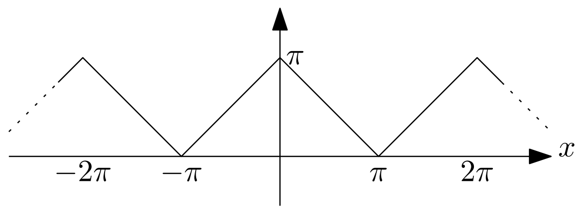
Sommer 2010

MUSTERLÖSUNG

zur Prüfung in Mathematik III für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

1. **a)** Der Graph von f sieht wie folgt aus:



b) Es sei

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

Da f gerade ist, gelten $b_k = 0$, $k \geq 1$, und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(kx)\, dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx, \qquad k \geq 0, \end{aligned}$$

also $a_0 = 2\pi - \pi = \pi$ und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx)\, dx \right) \\ &= 0 - \frac{2}{\pi k^2} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k^2} & \text{für ungerade } k, \\ 0 & \text{für gerade } k. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \frac{\cos(7x)}{49} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. **a)** Es ist

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 0 + 2xyz + 0 = 2xyz.$$

Der Fluss durch die Oberfläche des Prismas P ist nach dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
\int_P \operatorname{div} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= 2\int_0^3 \int_0^{2-|x|} \int_{-2}^{2} xyz\,dx\,dy\,dz \\
&= 2\left(\int_0^3 z\,dz\right)\left(\int_{-2}^{2} x\,\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-|x|}\,dx\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(\int_{-2}^{0} x(2-|x|)^2 dx + \int_0^2 x(2-|x|)^2 dx\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(\int_{-2}^{0} x(2+x)^2 dx + \int_0^2 x(2-x)^2 dx\right) \\
&= \frac{9}{2}\left(-\int_0^2 x(2-x)^2 dx + \int_0^2 x(2-x)^2 dx\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man sieht mit Hilfe eines einfachen Symmetriearguments auch leicht direkt ein, dass der Fluss verschwindet: der Integrand $\operatorname{div} F(x,y,z)$ ist ungerade in x, das Prisma P liegt indes symmetrisch zur yz-Ebene.

b) Es ist $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$ (für jedes Vektorfeld F).

3. **a)** Die Schnittkurve wird z.B. durch

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ -\sin\varphi\end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

parametrisiert. Dann ist $F(\gamma(\varphi)) = (1, \sin^2\varphi, -1)^T$ und also

$$\begin{aligned}
\int_E F\,d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(\varphi))\cdot\dot\gamma(\varphi)\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

b) Zunächst ist

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix}-2y-0\\ 0-0\\ 0-2y\end{pmatrix} = -2y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Eine von E berandete Fläche ist z.B. die Schnittfläche Σ der $x = z$-Ebene mit dem Vollzylinder. Da diese in der $x = z$-Ebene liegt, ist

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

normal zu Σ und nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_E F \, d\vec{s} = \int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \, dA = \int_\Sigma 0 \, dA = 0.$$

4. Mit dem gegebenen Ansatz für $u(x,t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&u_{xx}(x,t) + 2u_x(x,t) + \frac{1}{t} u_t(x,t) \\
&\quad = T(t)\left(5e^x + 9e^{-3x}\right) + 2T(t)\left(5e^x - 3e^{-3x}\right) + \frac{1}{t}\dot{T}(t)\left(5e^x + e^{-3x}\right) \\
&\quad = T(t)\left(15e^x + 3e^{-3x}\right) + \frac{1}{t}\dot{T}(t)\left(5e^x + e^{-3x}\right) \\
&\quad = \left(3T(t) + \frac{1}{t}\dot{T}(t)\right)\left(5e^x + e^{-3x}\right).
\end{aligned}$$

Daher ist $u(x,t)$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$\dot{T}(t) = -3t\,T(t). \tag{$\star$}$$

Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{dT}{T} = -3 \int t \, dt, \qquad \text{also} \qquad \ln T(t) = -\frac{3}{2}\,t^2 + c$$

und somit $T(t) = Ce^{-\frac{3}{2}t^2}$, $C \in \mathbb{R}$, als allgemeine Lösung von ($\star$).