

ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Wintersession WS13

Prüfung in Mathematik III Musterlösung

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umwelt naturwissenschaften

1. a) Integrieren Sie die Funktion $f(x, y, z) := xyz$ über den Bereich

$$\mathcal{O} := \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\},$$

den im ersten Oktanten liegenden Teil der Einheitskugel. (2 Punkte)

- b) Überlegen Sie mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen, was man erhält, wenn man dieselbe Funktion über die ganze Einheitskugel

$$B_1(0) := \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

integriert. (1 Punkt)

Lösung:

- a) – Direkte Rechnung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} f dV &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \sin^3 \theta \cos \theta \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi}_{=\frac{1}{2} \sin(2\varphi)} d\varphi d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \sin^3 \theta \cos \theta \underbrace{\left[-\frac{1}{4} \cos(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{1}{2}} d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r^5 \underbrace{\left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{1}{4}} dr \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

(2 Punkte für korrekte Rechnung)

– Rechnung in zylindrischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{O}} f dV &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 z \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi}_{=\frac{1}{2} \sin(2\varphi)} d\varphi dr dz \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r^3 z \underbrace{\left[-\frac{1}{4} \cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=\frac{1}{2}} dr dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 z \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}} dz \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 z (1 - 2z^2 + z^4) dz \\
 &= \frac{1}{8} \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{6}\right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

(2 Punkte für korrekte Rechnung)

- b) – Betrachte den Diffeomorphismus $j : B_1(0) \rightarrow B_1(0), p \mapsto -p$. Dann gilt nach der Transformationsformel für Integrale

$$\begin{aligned}
 \int_{B_1(0)} f(x, y, z) dV &= \int_{B_1(0)} (f \circ j)(x, y, z) |\det(-E_3)| dV \\
 &= - \int_{B_1(0)} f(x, y, z) dV.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das gesuchte Integral den Wert null annimmt. (1 Punkt für korrekte Rechnung)

- Die Funktion f ist ungerade in x und der Integrationsbereich symmetrisch zur yz -Ebene. Daraus folgt, dass das Integral verschwindet. Das Argument funktioniert gleichermassen, wenn man x, y und z permutiert. (1 Punkt für korrektes Argument)
- Direkte Rechnung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 \int_{B_1(0)} f dV &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^5 \sin^3 \theta \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta d\varphi d\theta dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{\pi} r^5 \sin^3 \theta \cos \theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}_{=0} d\theta dr = 0
 \end{aligned}$$

(1 Punkt für korrekte Rechnung)

– Direkte Rechnung in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)} f dV &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} xyz dx dy dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} yz \underbrace{\int_{-\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-z^2-y^2}} x dx}_{=0} dy dz = 0\end{aligned}$$

(1 Punkt für korrekte Rechnung)

2. Zeichnen Sie den Graph der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

und entwickeln Sie diese in eine Fourierreihe. (5 Punkte)

Lösung:

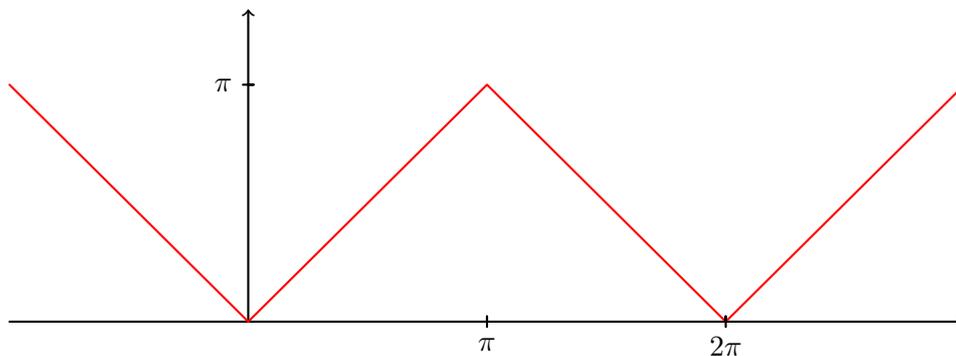


Abbildung 1: Graph der Fortsetzung der Funktion g auf ganz \mathbb{R} .

(*Zeichnung richtig: 1 Punkt*) Die 2π -periodische Fortsetzung der Funktion g ist offensichtlich gerade. Damit verschwinden alle Sinusterme (*1 Punkt - auch wenn explizit gerechnet*). Für die Koeffizienten der Cosinusterme unterscheiden wir die Fälle $k = 0$ und $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt = \frac{\pi}{2} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2\pi \cos(kt) dt}_{=0} - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} t \cos(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin(kt)}{k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt - \frac{1}{\pi} \left[\frac{t \sin(kt)}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die korrekte Berechnung der Koeffizienten gibt 2 Punkte.

$$\mathcal{F}(g(x)) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

1 Punkt für das Aufschreiben der Fourierreihe.

3. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$G(x, y, z) := \begin{pmatrix} x + \ln(1 + z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $\mathcal{K} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}$ (Sie können die Fläche selber orientieren). (5 Punkte)

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Fluss durch

$$\mathcal{H} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}$$

und verwenden Sie anschliessend den Satz von Gauss.

Lösung:

Betrachte die Halbkugel

$$\mathcal{B} := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$$

und beachte, dass $\partial\mathcal{B} = \mathcal{K} \cup \mathcal{H}$. Nach dem Satz von Gauss gilt demnach (ν bezeichnet die äussere Einheitsnormale von \mathcal{B})

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G \, dV &= \int_{\mathcal{K} \cup \mathcal{H}} \langle G, \nu \rangle \, dS \\ &= \int_{\mathcal{K}} \langle G, \nu \rangle \, dS + \int_{\mathcal{H}} \langle G, \nu \rangle \, dS. \end{aligned}$$

(1 Punkt für das korrekte Formulieren des Satzes von Gauss) Wegen $\operatorname{div} G(x, y, z) = 1 + 2 = 3$, ist

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} G \, dV = 3 \operatorname{vol}(\mathcal{B}) = 2\pi.$$

(1 Punkt für das korrekte Berechnen der Divergenz \mathcal{E} des Integrals) Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} \langle G, \nu \rangle \, dS &= \int_{\mathcal{H}} \left\langle \begin{pmatrix} x + \ln(1 + z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \, dS \\ &= - \int_{\mathcal{H}} 26 \, dS = -26 \operatorname{vol}(\mathcal{H}) \\ &= -26\pi \end{aligned}$$

(1 Punkte fürs Aufstellen, 1 Punkt für das korrekte Ergebnis)

Damit ist der Fluss von G durch \mathcal{K} gegeben durch $2\pi + 26\pi = 28\pi$. Die andere Orientierung spendiert ein Vorzeichen. (1 Punkt für die korrekte Schlussfolgerung)

4. Es sei Γ die Schnittellipse des Zylinders $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $\{(x, y, z) | z = 2y\}$.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x, y, z)$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} g(x, y, z) \\ xze^{xyz} \\ xye^{xyz} \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Weges Γ gleich 0 ist. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$V(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Weges Γ (wählen Sie selbst eine Orientierung)

i. direkt.

ii. mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(4 Punkte)

Lösung:

a) Falls F konservativ ist, verschwindet die Arbeit längs jedes geschlossenen Weges. Wir suchen also eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\nabla f = F$.

(1 Punkt für die Überlegung)

Aus der Integration nach y resp. z der y - resp. z -Komponente von F folgt, dass $f(x, y, z) := e^{xyz}$ ein Potential ist, falls $g = f_x$. Damit ist

$$g(x, y, z) := yze^{xyz}$$

eine (nicht eindeutige!) Funktion, die das Gewünschte tut. (1 Punkt für die Berechnung von g .) (Wer eine Funktion g angibt, die das Gewünschte tut, kriegt einen Punkt. Wer korrekt begründet, warum sie das Gewünschte tut, kriegt den zweiten Punkt.)

b) i. Parametrisiere Γ via

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$$

(1 Punkt für die Parametrisierung) und sei τ der entsprechend orientierte Einheitstangentenvektor.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle V, \tau \rangle ds &= \int_0^{2\pi} \langle (V \circ \gamma)(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ -\cos t \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt für die korrekte Rechnung)

ii. Parametrisiere die Schnittellipse Σ via

$$\Phi : (r, t) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 2r \sin t \end{pmatrix}$$

(1 Punkt für die Parametrisierung) Einen Normalenvektor auf diese Schnitt Ebene erhält man entweder durch eine elementargeometrische Betrachtung oder durch die Berechnung des Kreuzproduktes $\Phi_r \times \Phi_t$.

Wir arbeiten mit dem unnormierten Normalenvektor $(0, -2r, r)^T$, weil dessen Norm gerade dem Koeffizienten des Volumenelementes entspricht.

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle \text{rot } v, \nu \rangle dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3r \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2r \\ r \end{pmatrix} \right\rangle dr dt \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -3r^2 \sin t dr dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0. \end{aligned}$$

(1 Punkt für die korrekte Rechnung)

5. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung.

$$u_x(x, t) - \frac{u(x, t)}{x} - \frac{u_t(x, t)}{t} = 0$$

(4 Punkte)

Lösung:

Der Ansatz $u(x, t) := X(x)T(t)$ führt auf die Gleichung

$$\frac{X'}{X} - \frac{1}{x} = \frac{\dot{T}}{T \cdot t},$$

wobei jede Seite konstant ($= \lambda$) sein muss (1 Punkt).

Die Gleichung

$$\frac{X'}{X} = \lambda + \frac{1}{x}$$

lässt sich durch Integration nach x lösen. Es folgt $X(x) := C_1 x e^{\lambda x}$ (1 Punkt).

Die Gleichung

$$\frac{\dot{T}}{T} = \lambda t$$

hat als Lösung (analog) $T(t) = C_2 e^{\frac{1}{2}\lambda t^2}$ (1 Punkt). Mit $C := C_1 \cdot C_2$ ergibt sich als allgemeine Lösung

$$u(x, t) = C x e^{\lambda x} e^{\frac{1}{2}\lambda t^2} \quad (1 \text{ Punkt}).$$