Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Name:	**Departement:**
Vorname:	**Legi-Nr.:**

	1K	**2K**	**Punkte**	**Bemerkungen:**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
Total				

ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Sommer 2012

BASISPRÜFUNG MATHEMATIK I UND II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

Wichtig:

- Legen Sie Ihre ETH-Karte offen auf den Tisch.
- Füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Schreiben Sie auf alle zusätzlich abgegebenen Blätter Ihren Namen.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Schriftliche Unterlagen
- **kein** Taschenrechner
- **kein** Mobiltelefon

Viel Erfolg!

1. **a)** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z, für die gilt

$$\frac{z - 3i - 3}{z + 2 + 4i} = i$$

2 Punkte

b) Markieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$ die Menge aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichungen $|z - 1| \leq 1 \leq |z - i|$ erfüllen.

2 Punkte

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{e^{\sin x} + 1}.$$

1 Punkt

b)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

2 Punkte

3. Wir betrachten die Funktion

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto x(t) = e^{\sin t}.$$

a) Zeigen Sie, dass $x(t)$ eine Lösung folgender Differentialgleichung ist:

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) \cos t + x(t) \sin t = 0.$$

2 Punkte

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $x(t)$ um den Entwicklungspunkt $t = 0$.

2 Punkte

4. Finden Sie mit Hilfe des Ansatzes

$$x_p(t) = a \sin t + b \cos t, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

eine (partikuläre) Lösung x_p der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) \cos t + x(t) \sin t = 2\,(\sin t - 1)\,.$$

2 Punkte

5. Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) + \tan t \cdot x(t) = t \cdot \cos^2 t, \qquad x(0) = 2.$$

5 Punkte

6. Die Inverse A^{-1} der 3×3-Matrix A ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

a) die Lösung des Gleichungssystems $A\underline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2 Punkte

b) die Determinante der Matrix

$$3\,A\left(\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2.$$

3 Punkte

7. Wir betrachten

$$\text{die Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und den Vektor} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass das Gleichungssystem

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{$\star$}$$

keine eindeutige Lösung besitzt und beschreiben Sie, was dies geometrisch für die Spaltenvektoren der Matrix A bedeutet.

2 Punkte

b) Bestimmen Sie mit dem von Ihnen in Teilaufgabe **a)** gefundenen Wert für a den Parameter β so, dass das Gleichungssystem ($\star$) unendlich viele Lösungen besitzt und geben Sie die allgemeine Form derselben an.

2 Punkte

8. **a)** Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

den Eigenwert 3 besitzt.

1 Punkt

b) Lösen Sie mit dieser Wahl von a das Anfangswertproblem

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t), \qquad \underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

4 Punkte

9. Es sei $\mathcal{F}$ der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = xy.$$

Ferner sei C die Schnittkurve von $\mathcal{F}$ mit dem geraden Kreiszylinder

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \}.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Kurve C an.

1 Punkt

b) Bestimmen Sie die absoluten Extrema von f auf der Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

3 Punkte

c) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

längs C (wählen Sie selbst einen Umlaufsinn).

2 Punkte

10. Die Fläche $\mathcal{F}$ sei gegeben durch die Koordinatengleichung

$$3\,x^2 + 2\,y^2 + z^2 = 36.$$

a) Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf $\mathcal{F}$, in denen die Tangentialebene an die Fläche parallel zur Ebene $3x + 2y + 2z - 3 = 0$ ist.

3 Punkte

b) Fassen Sie die Gesamtheit derjenigen Punkte auf $\mathcal{F}$, in denen $z \geq 0$ ist, als Graph einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf. In welcher Richtung ist die Richtungsableitung von g im Punkt $(1, 2)$ minimal und wie gross ist dieser Minimalwert?

3 Punkte

11. Wir betrachten

$$\text{das Vektorfeld} \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \qquad \text{sowie}$$

$$\text{den Weg} \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix}. \qquad \text{(Schraubenlinie)}$$

a) Ist F ein Potentialfeld? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion von F oder begründen Sie, weshalb eine solche nicht existiert.

1 Punkt

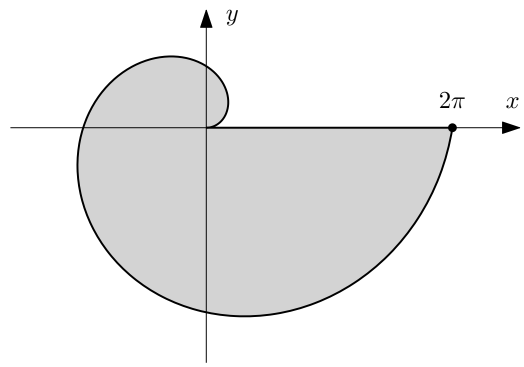
b) Berechnen Sie die Arbeit von F längs der Schraubenlinie γ zwischen dem Schnittpunkt mit der Ebene $z = 0$ und dem Schnittpunkt mit der Ebene $z = 1$.

2 Punkte

12. Berechnen Sie den Inhalt des Bereichs, der von der Archimedischen Spirale

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

und dem Intervall $[0, 2\pi]$ auf der x-Achse begrenzt wird (s. Figur).



3 Punkte