Dr. Ana Cannas da Silva

Serie 13 (Ferienserie)

Als „Aufwärmübung“ empfehlen wir Ihnen aus Papula Bd. 2 IV

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 1, 6, 7, 10, und 12,
- zu Abschnitt 5 die Übungsaufgaben 2 und 9,
  Hinweis: In Aufgabe 2 ist einer der Eigenwerte stets $\in \{0, \pm 1, 2, -a\}$
- zu Abschnitt 2 die Übungsaufgaben 2, 3, 4, 6, 13, 14 und 18.

Beachten Sie, dass die Aufgaben dieser Übungsserie den Stoff sowohl der 13. *als auch der 14.* Vorlesungswoche voraussetzen und erst im Frühjahrssemester 2013 (in der zweiten Semesterwoche) abgegeben werden müssen.

1. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2\,y_1 - 2\,y_3 + g(x), \\ y_2' &= -y_2 + h(x), \\ y_3' &= y_1 - y_3, \end{aligned}$$

für folgende „Störfunktionen“:

a) $g(x) = 0$ und $h(x) = 0$ **b)** $g(x) = e^{2x}$ und $h(x) = 0$

c) $g(x) = 0$ und $h(x) = 6$ **d)** $g(x) = e^{2x}$ und $h(x) = 6$

2. **a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

i) $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$ **ii)** $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

iii) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' = 0$ **iv)** $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Gleichung $y^{(3)} - y' = q$ für

i) $q(x) = e^{2x}$ **ii)** $q(x) = e^{x}$

iii) $q(x) = x^2$ **iv)** $q(x) = \cos x$

anhand der in der Vorlesung besprochenen Ansätze.

Bitte wenden!

3. Harmonische Schwingungen mit einem Freiheitsgrad werden durch lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben; und zwar freie Schwingungen durch homogene, erzwungene Schwingungen durch inhomogene.

a) Bestimmen und diskutieren Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,d\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0,$$

wobei $d > 0$ die Dämpfungs-, $k > 0$ die Elastizitätskonstante bezeichnen,

i) für den Fall $d^2 < k$ (sogenannte *schwache Dämpfung*).

ii) für den Fall $d^2 = k$ (sogenannte *kritische Dämpfung*).

iii) für den Fall $d^2 > k$ (sogenannte *starke Dämpfung*).

b) Die Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,d\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = K\cos(\omega t)\,, \qquad (\star)$$

$d, k > 0$, beschreibt einen gedämpften harmonischen Oszillator, auf den eine periodische Erregung mit Amplitude $K > 0$ und Frequenz $\omega > 0$ wirkt.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Gleichung ($\star$) und zeigen Sie, dass diese für $t \to \infty$ gegen eine harmonische *Resonanzschwingung*

$$x_R(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (\star\star)$$

mit der Frequenz ω und einer Phase φ konvergiert.

c) Diskutieren Sie - bei festen Konstanten $d, k > 0$ in ($\star$) - die Amplitude A der Resonanzschwingung ($\star\star$) in Funktion der Frequenz ω.

4. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme, indem Sie diese durch geeignete Substitutionen auf Gleichungen mit „getrennten Veränderlichen“ zurückführen:

a) $2\,x\,y\,y' - x^2 = y^2$, $\quad y(1) = 2$.

b) $y' = (x+y)(x+y+2) + 1$, $\quad y(0) = -2$.

c) $x\,y' = y\,(\ln x - \ln y + 1)\,$, $\quad y(1) = e^{\pi}$.

d) $x^2 y' = y(x-y)$, $\quad y(e) = \pi$.

5. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme durch „Variation der Konstanten“:

a) $xy' + y' + y = (x+1)e^{-x}$, $\quad y(0) = 0$.

b) $y' + 4xy = 4xe^{-2x^2}$, $\quad y(0) = 3$.

c) $xy' - y = x^2 + x + 1$, $\quad y(1) = -3$.

d) $y'\sin x - y\cos x = 4\sin^4 x$, $\quad y(\pi/2) = 0$.