D-ERDW, D-HEST, D-USYS | Mathematik II | FS 13
Dr. Ana Cannas da Silva

Serie 4

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula Bd. 2 III

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 5, 7, 8, 12, 13, 14, 20, 21, 24 und 27

1. Wir betrachten die folgenden Integrale

i) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy$ **ii)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} g(x,y)\,dy\,dx$

iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\,dy$ **iv)** $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{1} x^3 \sin y^3\,dy\,dx$

wobei f und g beliebige (integrierbare) Funktionen bezeichnen.

a) Skizzieren Sie für die Integralen **i)-iv)** jeweils das Integrationsgebiet.

b) Vertauschen Sie in den Integralen **i)-iv)** die Reihenfolge der Integrationen, so dass die innere Variable jeweils zur äusseren wird und umgekehrt.

c) Berechnen Sie die Integrale **iii)** und **iv)**.

2. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale mittels Polarkoordinaten:

a) $\displaystyle\iint_A (1 - 2\,x - 3\,y)\,dx\,dy,\ A:$ die Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$.

b) $\displaystyle\iint_B e^{x^2+y^2-1}\,dx\,dy,\ B:$ der Kreissektor $x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$.

c) $\displaystyle\iint_C \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy,\ C:$ der Ringteil $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x, y \geq 0$.

d) $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy,\ D:$ der Ringteil $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\,x$.

Bitte wenden!

3. Berechnen Sie das endliche Volumen, das durch

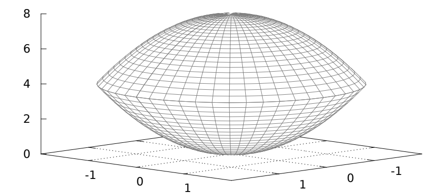
a) die Paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

und

$$z = 8 - x^2 - y^2$$

begrenzt wird.



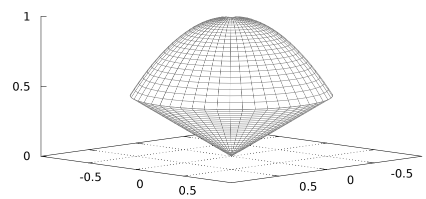
b) den Kegel

$$x^2 + y^2 = 3z^2, \quad z \geq 0,$$

und die Sphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

begrenzt wird.



4. Berechnen Sie durch Einführen geeigneter Koordinaten

a) die Masse einer Kugel vom Radius 2, deren Dichte der dritten Potenz des Abstandes vom Mittelpunkt proportional ist und im Einheitsabstand den Wert $\frac{1}{4}$ hat.

b) den Schwerpunkt des homogenen Körpers, der durch

das Paraboloid $z = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ und die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

im Halbraum $z \geq 0$ begrenzt wird.