D-ERDW, D-HEST, D-USYS — Mathematik II — FS 13

Dr. Ana Cannas da Silva

Serie 6

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula Bd. 3 I

- zu Abschnitt 1 die Übungsaufgaben 2, 4 und 6,
- zu Abschnitt 2 die Übungsaufgaben 1, 2, 3, 6 und 7.

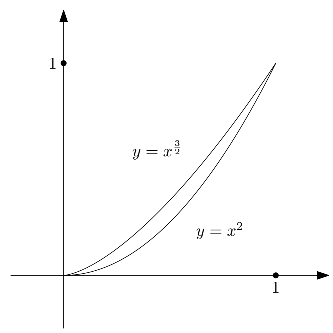
1. Berechnen Sie die Länge des Bogens

a) der Neilschen Parabel

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

b) der Parabel

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$



2. **a)** Skizzieren Sie das Bild der Brachistochrone: $t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) Berechnen Sie die Länge der Kardioide: $t \mapsto (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Helix

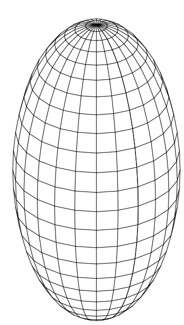
$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \qquad \text{mit Radius } r > 0 \text{ und Ganghöhe } 2\pi h > 0.$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\displaystyle\int_\gamma \delta \, ds$ wobei $\delta(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z}$.

3. Geben Sie eine Parametrisierung des Rotationsellipsoids $\mathcal{B}$ (Rugbyball)

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$$

und berechnen Sie mithilfe derselben das Integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{B}} \sqrt{1 + 3x^2 + 3y^2} \, dA$.

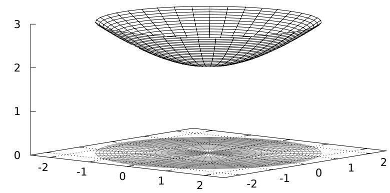


Bitte wenden!

4. Es sei $\mathcal{S}$ der Teil der Hyperboloidschale

$$z^2 - x^2 - y^2 = 4, \qquad z \geq 0,$$

über der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 5$.



a) Geben Sie zwei verschiedene Parametrisierungen der Fläche $\mathcal{S}$ an.

b) Berechnen Sie $\iint_{\mathcal{S}} f\, dA$, wobei $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

5. Wir betrachten die durch die Parametrisierung

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u\,(2 + \cos v) \\ \sin u\,(2 + \cos v) \\ \sin v \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq u, v \leq 2\pi,$$

gegebene Fläche $\mathcal{T}$ im $\mathbb{R}^3$.

a) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{T}$ mittels einiger Koordinatenlinien, d.h. anhand der Kurven, die sich aus f für festgehaltene Werte von v bzw. u ergeben.

b) Finden Sie eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, deren Niveaufläche zum Niveau 1 die Fläche $\mathcal{T}$ ist, d.h. so dass $\mathcal{T} = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 1 \,\}$.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{T}$.