D-ERDW, D-HEST, D-USYS — Mathematik II — FS 13
Dr. Ana Cannas da Silva

Serie 10

1. Berechnen Sie sowohl direkt als auch mit Hilfe des Satzes von Stokes die Arbeit

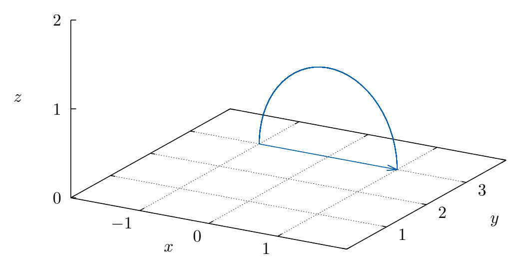
a) des Vektorfeldes $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3\,x - 4\,y + 2\,z \\ 4\,x + 2\,y - 3\,z^2 \\ 2\,x\,z - 4\,y^2 + z^3 \end{pmatrix}$ längs der (von oben betrachtet) positiv orientierten Ellipse $E = \{\,(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 9\,x^2 + 16\,y^2 = 144\,\}$.

b) des Vektorfeldes $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y^2 \\ -y^2 - z^2 \end{pmatrix}$ längs der (von oben betrachtet) positiv orientierten Schnittkurve der Ebene $E = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z\,\}$ mit der Zylindermantelfläche $Z = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\,\}$.

c) des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z \\ y\,e^y \\ x + 1 \end{pmatrix}$$

längs der Kurve, die von $A = (-1, 3, 0)$ geradlinig zu $B = (1, 3, 0)$ und von B auf dem Halbkreis mit Durchmesser $\overline{AB}$ in der Halbebene $y = 3$, $z \geq 0$ zurück zum Punkt A führt.



2. Berechnen Sie sowohl direkt als auch mit Hilfe des Satzes von Gauss den Fluss

a) des Vektorfeldes $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\,x - z \\ x^2\,y \\ -x\,z^2 \end{pmatrix}$ von innen nach aussen durch die Oberfläche des Würfels $W = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x,y,z \leq 1\,\}$.

b) des Radiusvektors $r = (x,y,z)^T$ von innen nach aussen durch die Oberfläche eines Kreiskegels mit Grundkreisradius R und Höhe h, dessen Grundfläche in der x-y-Ebene liegt und dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt.

c) des Radiusvektors $r = (x,y,z)^T$ von innen nach aussen durch die Oberfläche eines geraden Kreiszylinders mit Grundkreisradius R und Höhe h, dessen Achse durch den Ursprung geht.

Bitte wenden!

3. Die beiden Vektorfelder

$$H(x,y,z) = \frac{I}{2\,\pi}\,\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{mit einer Konstanten } I \neq 0$$

und

$$D(x,y,z) = \frac{Q}{4\,\pi}\,\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \qquad \text{mit einer Konstanten } Q \neq 0$$

sind wirbel- und quellfrei (vgl. Serie 7 Aufgabe **4**).

a) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes H längs eines beliebigen Kreises, der die z-Achse nicht schneidet (d.h. in $\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\neq(0,0)\,\}$ liegt).

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Arbeit längs eines Kreises in der x-y-Ebene mit Radius $r>0$ (vgl. Serie 8 Aufgabe **1 d)**) und unterscheiden Sie die Fälle, in denen der Kreis die z-Achse umläuft bzw. nicht umläuft.

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes D von innen nach aussen durch eine beliebige geschlossene Fläche, die den Ursprung umschliesst.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Fluss durch eine Sphäre um den Ursprung mit Radius $r>0$ und benutzen Sie den Satz von Gauss.

Bitte **beachten Sie**:

- Serie 10 wird nicht korrigiert und braucht daher **nicht abgegeben** zu werden.
- Die **Lösungen** zu Serie 10 werden am Ende des Semesters online verfügbar sein.
- In der nächsten Woche wird Ihnen vom Projekt nemesis (nemesis@ethz.ch) ein Link zum **MC-Abschlusstest** zugesandt. Diesen Test können Sie online lösen.
- Der **Einsendeschluss** für den MC-Abschlusstest ist der 14.6.2013.