D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik II FS 13
Dr. Ana Cannas da Silva

MC-Zwischentest

Einsendeschluss: 11.4.2013 17:00 Uhr

Frage 1

Welche der folgenden Funktionen ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert?

○ $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x+y}$

○ $g(x,y) = \sqrt{x^2+2y^2}$

○ $\varphi(x,y) = \sqrt{x+\ln y^2}$

○ $\psi(x,y) = \tan(x+y)$

Frage 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Welche der folgenden Aussagen über die Niveaulinien vor f ist korrekt?

○ Eine Niveaulinie kann sich nie selbst schneiden.

○ Jeder Punkt liegt auf genau einer Niveaulinie.

○ Jede Niveaulinie geht durch genau einen Punkt.

○ Keine der obigen Aussagen.

Frage 3

Die Niveauflächen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z,$$

sind

○ Paraboloide.

○ Kegel.

○ Sphären

○ keine der obigen Flächen.

Frage 4

Sei $f(x,y) = (\cos(x))^y$. Dann gilt für die partiellen Ableitungen von f

- ◯ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\tan(x)(\cos(x))^y \sin(x)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (-\sin(x))^y$.
- ◯ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y\tan(x)(\cos(x))^y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \ln(\cos(x))(\cos(x))^y$.
- ◯ $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln(\cos(x))(\cos(x))^y$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -y(\cos(x))^{y-1}\sin(x)$.
- ◯ Keine der obigen Gleichungen.

Frage 5

Die Tangentialebene an die Fläche $z = (x^2 + y^2)e^{-y}$ im Punkt $(1, 0, 1)$

- ◯ ist durch die Gleichung $x = 2y - z - 1$ gegeben.
- ◯ ist durch die Gleichung $y = 2z - x - 1$ gegeben.
- ◯ ist durch die Gleichung $z = 2x - y - 1$ gegeben.
- ◯ gibt es nicht, da der Punkt nicht auf der Fläche liegt.

Frage 6

Gegeben seien die folgenden Funktionen von zwei Variablen:

$$\varphi(x,y) = C, \quad \psi(x,y) = x^2 \qquad \text{und} \qquad \chi(x,y) = x^2 + y^2,$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aufgaben besitzt eine Lösung?

- ◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \varphi$ und $f_y(x,y) \equiv \psi$.
- ◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \psi$ und $f_y(x,y) \equiv \varphi$.
- ◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \varphi$ und $f_y(x,y) \equiv \chi$.
- ◯ Finde $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ mit $f_x(x,y) = \chi$ und $f_y(x,y) \equiv \varphi$.

Frage 7

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

- ◯ die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.
- ◯ die Produkte von zwei linearen Funktionen.
- ◯ die Produkte einer linearen Funktion $x \mapsto ax$ von x mit einer linearen Funktion $y \mapsto by$ von y.
- ◯ die Funktionen der Gestalt

  $$(x, y) \mapsto a + bx + cy + dxy$$

  mit Konstanten a, b, c, d.

Frage 8

Die Lemniskate $x^2(1 - x^2) = y^2$ lässt sich

- ◯ in der Nähe des Punktes $(0, 0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.
- ◯ in der Nähe des Punktes $(0, 0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.
- ◯ in der Nähe des Punktes $(1, 0)$ als Graph einer Funktion von x darstellen.
- ◯ in der Nähe des Punktes $(1, 0)$ als Graph einer Funktion von y darstellen.

Frage 9

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 + 6\,x\,y.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ◯ Die Funktion f hat ihren einzigen kritischen Punkt im Ursprung
- ◯ Es gelten $f_{xx}(0, 0) > 0$ und $f_{yy}(0, 0) > 0$. Die Einschränkungen von f auf die x- und y-Achse nehmen im Ursprung also ein lokales Minimum an.
- ◯ Die Funktion f nimmt im Ursprung ein lokales Minimum an.
- ◯ Die Funktion f nimmt kein lokales Minimum an.

Frage 10

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 - (3x+2)y^2, \qquad \mathbb{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ◯ Die Funktion f hat ihren einzigen kritischen Punkt im Ursprung.
- ◯ Die Funktion f besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt.
- ◯ Die Funktion f nimmt im Ursprung ein lokales Extremum an.
- ◯ Die Funktion f nimmt ein globales Extremum an.

Frage 11

Wir betrachten die Funktion

$$f : \Delta \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 y(4 - x - y),$$

auf dem durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $x + y = 6$ begrenzten Dreieck Δ.
Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ◯ Die Funktion f nimmt ihren kleinsten Wert auf dem Rand von Δ an.
- ◯ Die Funktion f nimmt ihren grössten Wert auf dem Rand von Δ an.
- ◯ Die Funktion f ist auf dem Definitionsbereich Δ überall $< \sqrt{17}$.
- ◯ Das Verhältnis von grösstem und kleinstem Funktionswert der Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich Δ ist $< -\frac{1}{17}$.

Frage 12

Welcher Punkt $P = (x,y)$ auf dem Hyperbelast $x^2 - y^2 = 12$, $x > 0$, hat vom Punkt $(0,4)$ auf der y-Achse den kleinsten Abstand?

- ◯ Der Punkt $P = (4,2)$.
- ◯ Der Punkt $P = (2\sqrt{7}, 4)$.
- ◯ Der Punkt $P = (2\sqrt{3}, 0)$.
- ◯ Einen solchen Punkt gibt es nicht.

Frage 13

Welches der folgenden Integrale ist *nicht* gleich den anderen?

- ○ $\int_0^1 \int_0^x x \, dy \, dx$
- ○ $\int_0^1 \int_0^y x \, dx \, dy$
- ○ $\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy$
- ○ $\int_0^1 \int_y^1 x \, dx \, dy$

Frage 14

Das Integral der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ über die Menge

$$B = \{(x,y) \,|\, x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ist

- ○ $\int_B f(x,y) \, dx \, dy = \frac{2\pi}{3}$.
- ○ $\int_B f(x,y) \, dx \, dy = \frac{4\pi}{3}$.
- ○ $\int_B f(x,y) \, dx \, dy = \frac{16\pi}{3}$.
- ○ $\int_B f(x,y) \, dx \, dy = \frac{32\pi}{3}$.

Frage 15

Gegeben ist das Integral $I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, wo D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ bezeichnet. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integrationen lässt sich I auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ◯ $I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$
- ◯ $I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$
- ◯ $I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos\varphi} r^2\,dr\,d\varphi$
- ◯ $I = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

Frage 16

Ein ebener Ring ist von zwei konzentrischen Kreisen mit den Radien R bzw. $r < R$ begrenzt. Die Massendichte des Rings nimmt umgekehrt proportional dem Abstand vom Mittelpunkt der Kreise ab und ist auf dem Innenrand gleich Eins. Welche Masse hat der Ring?

- ◯ $2\pi\,(R-r)$
- ◯ $2\pi\,(R^2-r^2)$
- ◯ $2\pi\,r\,(R-r)$
- ◯ $2\pi\,R\,(R-r)$

Frage 17

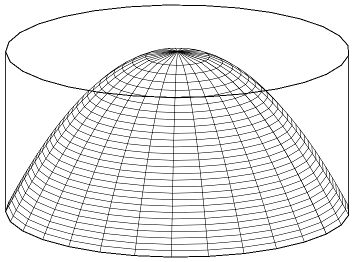
Es sei $a > 0$. Die *Lemniskate von Bernoulli* $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ begrenzt

- ◯ genau eine Fläche mit Inhalt $a^2/4$.
- ◯ genau zwei Flächen mit Inhalt $a^2/2$.
- ◯ genau vier Flächen mit Inhalt a^2.
- ◯ keine Fläche endlichen Inhalts.

Hinweis: Führen Sie Polarkoordinaten ein und beachten Sie, dass

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos(2\varphi). \qquad \text{(vgl. Serie 2 vom HS 12)}$$

Frage 18



Es sei V_Z das Volumen eines gegebenen Kreiszylinders, V_P das Volumen desjenigen Rotationsparaboloids, das mit diesem Zylinder Grundfläche und Höhe gemeinsam hat. Dann gilt

- ◯ $V_P = \frac{1}{3} V_Z$.
- ◯ $V_P = \frac{1}{2} V_Z$.
- ◯ $V_P = \frac{2}{3} V_Z$.
- ◯ keine der obigen Aussagen.

Frage 19

Der Schwerpunkt $S = (x, y)$ der zwischen der Parabel $y = -x^2 - 2x$ und der x-Achse gelegenen homogenen Fläche (endlichen Inhalts) ist

- ◯ $S = \left(\frac{2}{5}, -1\right)$.
- ◯ $S = \left(-1, \frac{2}{5}\right)$.
- ◯ $S = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.
- ◯ Der Ursprung.

Frage 20

Der Kugeloktant

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x, y, z \ge 0\}, \qquad R > 0,$$

sei mit der Masse der konstanten Dichte 1 belegt.

Der Schwerpunkt $S = (x, y, z)$ von K ist

- ○ $S = \left(\frac{1}{8}\,R, \frac{1}{8}\,R, \frac{1}{8}\,R\right)$.
- ○ $S = \left(\frac{3}{8}\,R, \frac{3}{8}\,R, \frac{3}{8}\,R\right)$.
- ○ $S = \left(\frac{5}{8}\,R, \frac{5}{8}\,R, \frac{5}{8}\,R\right)$.
- ○ Der Ursprung.