BSc D-MAVT, ETH Zürich
Numerische Mathematik
Lösung der Prüfung
Sommer 2008

Prof. K.Nipp

— • —

1. a)

$$J(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi x_1) & 3(x_2-2)^2 \\ 2x_1 - 3 & 2x_2 - 8 \end{pmatrix}.$$

b)

$$x^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Zu lösen ist: } J(x^0)\Delta^0 = -f(x^0), \text{ also}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_1^0 \\ \Delta_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_2^0 = -1,\ \Delta_1^0 = -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow x^1 = x^0 + \Delta^0 = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\tilde{J}(x) = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} f_1(x_1+h, x_2) - f_1(x_1, x_2) & f_1(x_1, x_2+h) - f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1+h, x_2) - f_2(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2+h) - f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\tilde{J}(x^0) = \begin{pmatrix} -0.04934396\ldots & 3.03009999\ldots \\ 5.00999999\ldots & -1.98999999\ldots \end{pmatrix}$$

d)

```
function [x_new,iter]=newton_mit_vorwdiff(x0,tol,maxit,h)
% Modifiziertes Newton-Verfahren: die Jacobi-Matrix wird mit dem
% Vorwaerts-Differentenquotient approximiert.
% Input:     x0       Startwert
%            tol      Toleranz
%            maxit    maximaler Anzahl Iterationen
%            h        Genauigkeitsfaktor fuer den
%                     Vorwaerts-Differentenquotient
%
% Output:    x_new    Loesungsapproximation nach "iter" Schritten
%                     zur Toleranz tol
%            iter     Anzahl durchgefuehrte Iterationen
x_old = x0;
```

Bitte wenden!

```
for iter=1:maxit
    Delta = -Df_approx(x_old,h)\f(x_old);
    x_new = x_old + Delta;
    if(norm(x_new-x_old)<tol*norm(x_new)+tol)
      return
    end
    x_old = x_new;
end
end

% Approximation zu der Jacobi-Matrix mit dem
% Vorwaerts-Differentenquotient
function[J_tilde]=Df_approx(x,h)
J_tilde = [(f(x+[h,0])-f(x))/h, (f(x+[0,h])-f(x))/h];
end

function[f_]=f(x)
f_ = [cos(pi*x(1))+(x(2)-2).^3+1;  (x(1)-1.5).^2+(x(2)-4).^2-25/4];
end
```

2. a)

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2, \; p'(x) = b + 2cx \\ p(0) &= a = 1 \\ p(1) &= a + b + c = 1 \\ p'(0) &= b = 1 \\ &\Rightarrow a = b = 1, \, c = -1 \Rightarrow p(x) = 1 + x - x^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}} \frac{x-1}{0-1} = 2x^2 - 3x + 1 \\ \ell_{01}(x) &= \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = -4x^2 + 4x \\ \ell_1(x) &= \frac{x-0}{1-0} \frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2x^2 - x \\ \Rightarrow P_2(x) &= 1 \cdot \ell_0(x) + \frac{5}{4} \cdot \ell_{01}(x) + 1 \cdot \ell_1(x) = 1 + x - x^2 \end{aligned}$$

3. Polynom $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ wird exakt integriert, wenn

$$\int_0^1 p(x)\,dx = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = Aa + Bb + C(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3),$$

Siehe nächstes Blatt!

also

$$\begin{aligned}
1 &= A + C \\
\frac{1}{2} &= B + C\alpha \\
\frac{1}{3} &= C\alpha^2 \\
\frac{1}{4} &= C\alpha^3 \\
\overset{(\alpha\neq 0)}{\Rightarrow} A &= \frac{11}{27},\ B = \frac{1}{18},\ C = \frac{16}{27},\ \alpha = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

4. a) Approximiere $x(t+h)$ durch das Taylorpolynom vom Grad 3:

$$\begin{aligned}
x(t+h) &\approx x(t) + \dot{x}(t)h + \ddot{x}(t)\frac{h^2}{2} + x^{(3)}(t)\frac{h^3}{6} \\
\dot{x}(t) &= f(x) = \frac{1}{\cos x} \\
\ddot{x}(t) &= f_t + f_x \underbrace{\dot{x}(t)}_{=f(x)} = f_x f \\
x^{(3)}(t) &= f_{tt} + 2f_{xt}f + f_{xx}f^2 + f_x f_t + f_x^2 f = f_{xx}f^2 + f_x^2 f \\
\Rightarrow F(t,x,h) &= x + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_x f) + \frac{h^3}{6}(f_{tt} + 2f_{xt}f + f_{xx}f^2 + f_x f_t + f_x^2 f) \\
&= x + hf + \frac{h^2}{2}f_x f + \frac{h^3}{6}(f_{xx}f^2 + f_x^2 f)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
f &= \frac{1}{\cos x}, \quad f_t = f_{tt} = f_{xt} = 0, \\
f_x &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad f_{xx} = \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos x} + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}.
\end{aligned}$$

Hier $\tilde{x}_0 = 0,\ h = \frac{1}{2},\ f_x(\tilde{x}_0) = 0,\ f_{xx}(\tilde{x}_0) = 1$, also

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{8}(0+0) + \frac{1}{48}(0+0+1+0+0) = \frac{25}{48}$$

b) Löse $\dot{x} = 1/\cos x$ durch Separation der Variable:

$$\begin{aligned}
&\cos x\, dx = dt \Rightarrow \int \cos x\, dx = \int dt \\
&\Rightarrow \sin x = t + C \Rightarrow x(t) = \arcsin(t + C) \\
&\quad x(0) = 0 \Rightarrow \arcsin(C) = 0 \Rightarrow C = 0 \\
&\Rightarrow x(t) = \arcsin(t)
\end{aligned}$$

Lokaler Fehler: $\ell(0, \tilde{x}_0, h) = \tilde{x}_1 - \arcsin(\frac{1}{2}) = -0.00276544\ldots$

Bitte wenden!

5. **(i)** Approximiere u_{xx} durch den symmetrischen Differenzenquotienten. Die Gleichung ist dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Schreibe $u_\ell(t)$ als Approximation von $u(t,x_\ell)$, wobei $x_\ell = \frac{\ell}{3}$, $\ell = 1,2$. Wegen den Randbedingungen gilt: $u_0 \equiv 0$, $u_3 \equiv 1$.
ODE für u_1, u_2:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} u_2 - 2u_1 + u_0 \\ u_3 - 2u_2 + u_1 \end{pmatrix} = 9\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:\hat{A}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\hat{b}}\right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}}_{=:A}\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{=:\underline{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}}_{=:b} =: f(\underline{u})$$

(ii) Impliziter Euler-Schritt:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{u}}^1 &= \underline{\tilde{u}}^0 + \Delta t\, f(\underline{\tilde{u}}^1) = \underline{\tilde{u}}^0 + \Delta t\,(A\underline{\tilde{u}}^1 + b) \\ \Rightarrow (I_2 - \Delta t\, A)\underline{\tilde{u}}^1 &= \underline{\tilde{u}}^0 + \Delta t\, b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\underline{\tilde{u}}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & \frac{1}{3} \\ -3 & 7 & \frac{11}{3} \end{array} \longmapsto \begin{array}{cc|c} 7 & -3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{40}{7} & \frac{80}{21} \end{array} \Rightarrow \underline{\tilde{u}}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6. **a)** Rückwärts-Vektoriteration:

$$y^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix},\ N = \|y^0\| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\hat{x}^0 = \operatorname{sign}(y_1^0)\frac{1}{N}y^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44721359\ldots \\ -0.89442719\ldots \end{pmatrix}$$

Löse $Ay^1 = \hat{x}^0$ entweder direkt oder mit LRP-Zerlegung. Direkt:

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \longmapsto \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -1 & \frac{5}{\sqrt{5}} \end{array} \Rightarrow y^1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \|y^1\| = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{5}} = 2.60768096\ldots$$

$$\hat{\lambda}_1 = \operatorname{sign}(y_1^1)\frac{1}{N} = 0.38348249\ldots$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Exakte Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38196601\ldots$$
$$\Rightarrow \frac{|\lambda_1 - \hat{\lambda}_1|}{|\lambda_1|} = 0.003970204\ldots$$

c) Vorwärts-Vektoriteration:

$$y^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; N = \|y^0\| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$
$$\hat{x}^0 = \operatorname{sign}(y_1^0)\frac{1}{N}y^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.89442719\ldots \\ 0.44721359\ldots \end{pmatrix}$$

Als Approximation zu den gesuchten Eigenvektor zum (betragsmässig) grössten Eigenwert von A kann man einfach y^1 nehmen (Skalierung nicht gefragt/nötig):

$$y^1 = A\hat{x}^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$