ETHZ, D-MAVT
Prüfung Frühjahr 2007
Numerische Mathematik
Prof. Dr. K. Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung
- Erlaubte Hilfsmittel: 10 A4-Seiten (=5 Blätter) eigene Notizen; Taschenrechner mitbringen
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

– • –

1. a) Die Grösse $x \in [0,1]$ habe einen relativen Fehler von 0.1%. Es soll

$$y = e^{\alpha x}$$

berechnet werden für $\alpha > 1$.
Für welche α kann y mit einem relativen Fehler von 1% berechnet werden ?

b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $n \times n$-Koeffizienten-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

i. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das für beliebiges n die Konditionszahl (in der 2-Norm) der Matrix A berechnet.

ii. Erweitern Sie das Programm aus i., so dass es die Lösung x von $Ax = b$ für $b = (1, 2, ..., n)^T$ mittels LR-Zerlegung berechnet.

2. Die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha > 0$$

soll mit dem Jacobi-Verfahren approximiert werden.

a) Für welche Werte des Parameters α konvergiert das Jacobi-Verfahren?

b) Führen Sie für $\alpha = 3$ einen Schritt des Jacobi-Verfahrens durch mit Startvektor $x^0 = (1, 1)^T$.

c) Wieviele Iterationen braucht das Jacobi-Verfahren für $\alpha = 3$ höchstens, um den relativen Anfangsfehler um einen Faktor 10^{-6} zu verkleinern.

3. a) Gesucht sei ein Fixpunkt der Gleichung

$$x = a^x \quad , \quad a > 1$$

für $x \in [0, 2]$.
Für welche Werte von a sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt?

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = cos(x)^2 \quad , \quad g(x) = 2x + \frac{1}{2} \quad .$$

In welchem Punkt (x^*, y^*) der x-y-Ebene schneiden sich die Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$?
Berechnen Sie (x^*, y^*) auf 3 Ziffern genau mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

4. Es soll eine *periodische* Spline-Interpolierende (mit Periode 2) durch die Daten

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0	1/3	2/3	1	4/3	5/3	2
f_i	0	1	2	0	-1	-2	0

gelegt werden

a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem $Af' = d$ auf für die Ableitungen f_i' der Spline-Interpolationsfunktion.

b) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, welches das Gleichungssystem aus a) löst.

5. Gegeben sei das Integral

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda e^x dx \quad , \quad \lambda > 0$$

a) Berechnen Sie eine Approximation von $I(\lambda)$, indem Sie 3 Schritte des Trapezmethode durchführen.

b) Bestimmen Sie den absloluten Fehler der Approximation von a) für $\lambda = 1$.

c) Verbessern Sie die Approximation aus b), indem Sie 2 Schritte des Rombergschemas durchführen, und bestimmen Sie wieder den absoluten Fehler.

6. Das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

definiert ein Runge-Kutta-Verfahren.

a) i. Wieviele Stufen hat das Verfahren? Ist es explizit oder implizit? Um welches Verfahren handelt es sich?

ii. Formulieren Sie einen Schritt des Verfahrens angewandt auf die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

b) Das Verfahren soll auf die Differentialgleichung zweites Ordnung

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$

angewandt werden.

i. Sei $y := (x, \dot{x})^T$. Bestimmen Sie eine Matrix $A(h)$, so dass der allgemeine Schritt des Verfahrens die Form

$$y^{k+1} = A(h)y^k$$

hat.

ii. Bestimmen Sie $||A(h)||_2$ für $h = 1$. Wie verhält sich $||y^k||_2$ für $k \to \infty$ für dieses h?