MATH, PHYS, CHAB Analysis II FS 2014
Prof. Dr. E. Kowalski

Musterlösung Serie 12

1. (a) ϕ ist bijektiv, da es ein Inverse ψ gibt: Für die Wahlen arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ und arctan : $]-\infty,+\infty[\to]-\pi/2,+\pi/2[$ gilt

$$\psi(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \arccos(z/r), f(x,y))$$

mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{if } x > 0 \\ \arctan(y/x)+\pi, & \text{if } x < 0, y \geqslant 0 \\ \arctan(y/x)-\pi, & \text{if } x < 0, y < 0 \\ \pi/2, & \text{if } y > 0, x = 0 \\ -\pi/2, & \text{if } y < 0, x = 0 \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist, reicht es nach dem Inversen Funktionen Theorem zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \det d\phi(r,\theta,\phi) &= \det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cos\theta \det \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} + r\sin\theta \det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta\sin\theta = r^2\sin\theta \end{aligned}$$

nicht verschwindet, was auf W der Fall ist. (Wir haben die Determinante nach der dritten Zeile entwickelt)

(b) $m(W) = 2\pi^2$

(c) Wir berechnen mit der Substitutionsregel gelfolgt von Fubini:

$$\begin{aligned} m(B_0) &= \int_{B_0} 1 d(x,y,z) \\ &= \int_W |\det d\phi(r,\theta,\phi)| d(r,\theta,\phi) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} r^2 |\sin(\theta)| d\phi \right) d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 r^2 dr \; 2\int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} 1 d\phi = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

(d) $m(B \setminus B_0) = 0$, da dieser Differenz eine Dimension fehlt, um positives Mass zu haben.

2. Wir zeigen die Formel per Induktion. Anker ist klar. Gelte die Formel für

$< n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
m_n(S_n(l_1,\dots,l_n)) &= \int_0^{l_1}\int_0^{l_2(1-x_1/l_1)}\cdots\int_0^{l_n(1-\sum_{j=1}^{n-1}x_n/l_n)} 1dx_n\cdots dx_2dx_1\\
&= l_1\cdots l_n\int_0^1\int_0^{1-x_1}\cdots\underbrace{\int_0^{1-\sum_{j=1}^{n-1}x_n} 1dx_n}_{=1-\sum_{j=1}^{n-1}x_j}\cdots dx_2dx_1\\
&= l_1\cdots l_n\left(m_{n-1}(S_{n-1}(1,\dots,1)) - \sum_{j=1}^{n-1}\int_{S_{n-1}(1,\dots,1)} x_j d(x_1,\dots,x_{n-1})\right)\\
&= l_1\cdots l_n\left(\frac{1}{(n-1)!} - (n-1)\int_{S_{n-1}(1,\dots,1)} x_1 d(x_1,\dots,x_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
\int_{S_{n-1}(1,\dots,1)} x_1 d(x_1,\dots,x_{n-1}) &= \int_0^1 x_1\int_0^{1-x_1}\cdots\int_0^{1-\sum_{j=1}^{n-2}x_j} 1dx_{n-1}\cdots dx_2dx_1\\
&= \int_0^1 x_1\int_0^{(1-x_1)\cdot 1}\cdots\int_0^{(1-x_1)\cdot(1-\sum_{j=2}^{n-2}\frac{x_j}{1-x_1})} 1dx_{n-1}\cdots dx_2dx_1\\
&= \int_0^1 x_1 m_{n-2}(S_{n-2}(1-x_1,\dots,1-x_1))dx_1\\
&= \int_0^1 (1-x_1) m_{n-2}(S_{n-2}(x_1,\dots,x_1))dx_1\\
&= \int_0^1 (1-x_1)x_1^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}dx_1\\
&= \frac{1}{(n-2)!}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Mit der vorigen Rechnung erhalten wir

$$m_n(S_n(l_1,\dots,l_n)) = l_1\cdots l_n\left(\frac{1}{(n-1)!} - (n-1)\frac{1}{n!}\right) = \frac{l_1\cdots l_n}{n!}$$

3. (a) $2\cdot m_3(B_3) = \frac{8\pi}{3}$
   (b) $\int_0^\pi\int_0^{\sin(x)} dydx = \int_0^\pi \sin(x)dx = 2$.
   (c) Mit mehrfacher Anwendung von Pythagoras finden wir: Die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge 1 ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit finden wir die Höhe des Tetraeders : $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Das Volumen (aka der Flächeninhalt) des gleichseitigen Dreiecks D ist

$$\int_0^1\int_0^{h(x)} dydx = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

wo $h(x) = \begin{cases} x\sqrt{3}, & \text{falls } x \leqslant \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} - x\sqrt{3}, & \text{falls } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$. Also folgt

$$m_3(T) = \int_0^h m_2(\frac{s}{h}D)ds = \int_0^h \frac{s^2}{h^2} m_2(D)ds = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

4. (a) Wähle in der Formel von Green einmal das Funktionenpaar $(-y, 0)$ und einmal das Funktionenpaar $(0, x)$. Beide male erhalten wir $m_2(\Omega)$ als Ergebnis.

   (b) Sei E die Ellipse. Eine Parametrisierung des Randes ist

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (a^{-1/2}\cos(t), b^{-1/2}\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \gamma'(t) &= (-a^{-1/2}\sin(t), b^{-1/2}\cos(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2(E) &= \frac{1}{2}\int_{\partial E}(xdy - ydx) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^{-1/2}\cos(t)b^{-1/2}\cos(t) - b^{-1/2}\sin(t)(-a^{-1/2}\sin(t))\right)dt \\ &= \frac{1}{2}(ab)^{-1/2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \int_\gamma (K_1dx + K_2dy + K_3dz) &= \int_0^{+\infty}(\gamma_1(t)\gamma_1'(t) + \gamma_2(t)\gamma_2'(t) + e^{-\gamma_3(t)}\gamma_3'(t))dt \\ &= \int_0^{+\infty}(-\cos(t)\sin(t) + \cos(t)\sin(t) + 1e^{-t})dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} = 1 \end{aligned}$$