MATH, PHYS, CHAB Analysis II FS 2014
Prof. Dr. E. Kowalski

Serie 1

In dieser Serie geht es unter Anderem um Stammfunktionen. Zunächst wiederholen wir die grundlegenden Definitionen und Rechenregeln.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben. Eine differenzierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion zu f, falls $g' = f$. Wir schreiben in diesem Fall $g = \int f$. Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt.

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Falls $g'f$ eine Stammfunktion $\int fg'$ besitzt, so besitzt auch $f'g$ eine Stammfunktion und es gilt $\int f'g = fg - \int fg'$.Diese Regel nennt man *partielle Integration*.

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $\phi : J \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion von einem offenen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ nach I. Es gilt $\left(\int f \right) \circ \phi = \int (f \circ \phi)\phi'$, sobald die Funktion f eine Stammfunktion besitzt. Dies nennt man die *Substitutionsregel*.

1. Beweisen Sie die Regel, welche partielle Integration beschreibt.

2. Beweisen Sie die Substitutionsregel.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Finden Sie Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

   (a) $f(x) := \log x$ und $a > 0$,

   (b) $f(x) := xe^{x^2}$,

   (c) $f(x) := x \cos(x)$,

   (d) $f(x) := \sin(x)$,

   (e) $f(x) := \sin^2(x)$,

   (f) $f(x) := \sin^3(x)$,

   (g) $f(x) := \exp(\sin(x)) \cos(x)$,

   (h) $f(x) := \sin^2(x)\, e^{-x}$,

   (i) $f(x) := \frac{dx}{1+\cos(x)}$ und $]a, b[\subset]-\pi, \pi[$.

   (j) $f(x) := \sinh(x) \cos(x)$,

   (k) $f(x) := \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$,

   (l) $f(x) := \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$,

   (m) $f(x) := \frac{x+1}{x^2-4}$ und $a > 2$.

   Hinweis: Die folgenden Substitutionen können von Nutzen sein: $\phi(x) := \tan(x/2), \phi(x) := x^2 + 1$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Beweisen Sie die folgenden zwei Ungleichungen, indem Sie die geeignete Integrale mit geeigneten Treppenfunktionen Berechnen.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \log(n) \qquad\qquad \log(n!) \leqslant 1 + n \log(n-1)$$

5. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Seien f, g Funktionen, sodass f, g, fg Stammfunktionen besitzen. Gilt dann $\int fg = (\int f)(\int g)$?

(a) Nein.

(b) Ja.

2. Sei $h : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x}$. Sei f eine nichtnegative Funktion, sodass f und $h \circ f$ Stammfunktionen besitzen. Gilt dann $h \circ \int f = \int (h \circ f)$?

(a) Nein.

(b) Ja.

3. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei integrable Funktionen mit $f \leqslant g$. Folgt dann $\int_a^y f(x)dx \leqslant \int_a^y g(x)dx$ für alle $y \in [a, b]$?

(a) Ja.

(b) Nein.

4. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $\int_a^y f(x)dx \leqslant \int_a^y g(x)dx$ für alle $y \in [a, b]$. Folgt dann $f \leqslant g$?

(a) Nein.

(b) Ja.

5. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ eine Integrable Funktion mit $\int_a^b f = 0$. Folgt dann $f = 0$?

(a) Ja.

(b) Nein.

Abgabe: Montag, den 3.3.2014 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.